CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 11 - 12. 11. 2011

CLASA a XII a

1. Considerăm mulţimile de trinoame

$M=\left\{X^2+aX+b \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}, G=\left\{X^2+aX+b \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0\right\}$ şi operaţia "$\bullet$"

$$\left(X^2+a_1X+b_1\right)\bullet\left(X^2+a_2X+b_2\right)=X^2+\left(a_1+a_2\right)X+b_1b_2.$$

a) Arătaţi că $(M,\bullet)$ este monoid comutativ şi determinaţi toate elementele neinversabile din M.

b) Arătaţi că $(G,\bullet)$ este grup abelian.

c) Rezolvaţi ecuaţia $\left(X^2+aX+b\right)^{2011}=X^2+X$ în M şi ecuaţia $\left(X^2+aX+b\right)^{-2012}=X^2+1$ în G.

Dan Negulescu

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $2n+1$ elemente cu proprietatea că există o funcţie $f:G\to G$ astfel încât $f\left(x\cdot f(xy)\right)=y\cdot f\left(x^2\right),(\forall)\,x,y\in G.$ Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Gazeta Matematică

3. Aflaţi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă

$$f(x)\left(x^2+1\right)=e^x\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+xF(x),(\forall)\,x\in\mathbb{R},$$

unde F este o primitivă a lui f şi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=\dfrac{3e}{\sqrt{2}}$. Apoi aflaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $f(x)=\dfrac{m}{\sqrt{x^2+1}}$ admite trei soluţii reale distincte.

Carmen şi Viorel Botea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.