

# Concursul “Stelele matematicii” 2011

★ ★ ★ Sâmbătă, 10 decembrie 2011, orele 09:30  
★ ★ ★ Liceul Internațional de Informatică București  
★ ★ ★ **Proba Juniori**

**Problema 1.** Fie numerele reale pozitive  $a, b, c, d$ , cu  $abcd = 1$ . Determinați valorile posibile pe care le poate lua expresia

$$\frac{1+a+ab}{1+a+ab+abc} + \frac{1+b+bc}{1+b+bc+bcd} + \frac{1+c+cd}{1+c+cd+cda} + \frac{1+d+da}{1+d+da+dab}.$$

**Problema 2.** Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic ne-echilateral, unde vârful  $A$  se află pe mediatoarea segmentului  $HO$ , care unește ortocentrul  $H$  cu centrul  $O$  al cercului circumscris. Determinați valorile posibile pe care le poate lua măsura unghiului  $A$ .

**Problema 3.** Planul este împărțit în pătrate unitate, alternativ colorate negru și alb, ca o tablă de șah. Un poligon  $\Pi$  de arie  $S$  și perimetru  $P$ , nu neapărat convex, este format din câteva dintre aceste pătrate (laturile sale sunt de-a lungul laturilor pătratelor). Demonstrați că  $\Pi$  nu conține mai mult de  $\frac{S}{2} + \frac{P}{8}$ , nici mai puțin de  $\frac{S}{2} - \frac{P}{8}$  pătrate de aceeași culoare.

**Problema 4.** Fie  $n \geq 2$  un număr întreg. Vom numi *interval* o submulțime  $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  pentru care există numerele întregi  $1 \leq a < b \leq n$ , astfel încât  $A = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ . Fie acum o familie  $\mathcal{A}$  de submulțimi  $A_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , astfel încât pentru orice  $1 \leq i < j \leq N$  submulțimea  $A_i \cap A_j$  să fie un interval. Demonstrați că  $N \leq n^2/4$ , și că această margine este cea mai bună posibilă, adică prezentați un exemplu pentru care  $N > n^2/4 - 1$ .

---

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru  $4\frac{1}{2}$  ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății - niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

★ ★ ★ **Mult SUCCES tuturor participanților!**