

Concursul “Stelele matematicii” 2011

★ ★ ★ Sâmbătă, 10 decembrie 2011, orele 09:30
★ ★ ★ Liceul Internațional de Informatică București
★ ★ ★ Proba Seniori

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $AB \neq BC$, fie M mijlocul laturii AC , N punctul unde mediana BM intersectează din nou cercul circumscris triunghiului ABC , H ortocentrul triunghiului ABC , D punctul de pe cercul circumscris pentru care $\angle BDH = 90^\circ$, și K punctul pentru care patrulaterul $ANCK$ este paralelogram. Demonstrați că dreptele AC , KH , BD sunt concurente.

Problema 2. Demonstrați că există infinit de multe numere întregi pozitive n astfel ca pentru orice număr prim p , cu $p \mid n(n+1)$, să avem și $p^2 \mid n(n+1)$. Determinați atât o valoare pară cât și o valoare impară pentru astfel de numere $n > 8$.

Problema 3. Pentru un număr întreg $n \geq 3$, determinați intervalul valorilor posibile ale expresiei

$$E_n(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}$$

unde numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$ satisfac $|x_k - x_{k+1}| \leq 1$ pentru fiecare $1 \leq k \leq n - 1$. Determinați și când se ating valorile extreme.

Problema 4. Fie date n mulțimi A_i cu câte n elemente fiecare. Demonstrați că elementele lor pot fi indexate $A_i = \{a_{i,j} \mid j = 1, 2, \dots, n\}$, $1 \leq i \leq n$, în așa fel încât mulțimile $B_j = \{a_{i,j} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, $1 \leq j \leq n$, de asemenea să aibă câte n elemente fiecare.

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății - niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează 10 puncte.

★ ★ ★ Mult SUCCES tuturor participanților!