Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 18.02.2012

Clasa a IX-a, BAREME

Problema 1:

a) Notăm $S = x + y, P = x \cdot y$ şi inegalitatea e echivalentă cu $SP + S - 2P \geq 0$ ....1 pct

Foloseşte $S \geq P \Rightarrow SP + S - 2P \geq 2\sqrt{P}\left(P - \sqrt{P} + 1\right) = 2\sqrt{P}\left[\left(\sqrt{P} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 0$ ....2 pct

b) $\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{x+y} - 1 \leq \frac{1}{xy}$ ....1 pct

$\frac{1+a}{b+c} = \frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{2(a+b+c)-b-c}{b+c} = \frac{2-b-c}{b+c} = \frac{2}{b+c} - 1$, adună...3 pct

Problema 2:

a) $m = 4$ **... 3p**

b) Identitatea lui Hermite : $[t] + \left[t + \frac{1}{3}\right] + \left[t + \frac{2}{3}\right] = [3t]$..1 pct

Notăm $\frac{x}{3} = t$ şi ajungem la: $[3t] - [t] = \left[\frac{3t+1}{2}\right] + \frac{3t-1}{2}$ .... 1 pct

Din $\frac{3t-1}{2} = k \in \mathbf{Z}$ avem : $t = \frac{2k+1}{3}$ (poate observ de la început că $x = 2k+1$).....................1 pct

$[2k+1] - \left[\frac{2k+1}{3}\right] = \left[\frac{2k+2}{2}\right] + k$, $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow \left[\frac{2k+1}{3}\right] = 0 \Rightarrow k = 0, t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1$ ....1 pct

Problema 3:

Obține $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \vec{0} \Leftrightarrow \Delta ABC$ echilateral...1 pct

Obține $\overrightarrow{BD} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$ şi analoagele...2 pct

Ajunge la $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \frac{ab-c^2}{(b+c)(a+c)}\overrightarrow{CA} + \frac{b^2-ac}{(b+c)(a+B)}\overrightarrow{AB}$ ....2 pct

$\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ necoliniari $\Leftrightarrow$ coordonatele proporționale $\Leftrightarrow \Delta ABC$ echilateral....................................2 pct

Problema 4:

Observă că pentru $n = 4$ există a_1, a_2, a_3, a_4 cu $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$. ....2 pct

Presupunem că există $a_1, a_2, ..., a_n$ numere pare distincte cu $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... \frac{1}{a_n}$, presupunem

$a_1 < a_2 < ... < a_n$ şi $n \geq 4$ şi arată prin inducție $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + ... + \frac{1}{2a_n}$ ....4 pct.

$2 < 2a_1 < ... < 2a_n$, deci sunt $n+1$ numere pare distincte..1 pct

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 18.02.2012

Clasa a X-a
BAREME

Problema 1:

a) Inducție matematică..........2 pct

b) Din inducție deduce că $(1+t)^x \geq 1+tx$ cu egalitate doar pentru $x \in \{0,1\}$ .... 1 pct

Scrie inegalitatea pentru $n=0, n=1, ..., t=n-1$ şi obține $1^x+2^x+3^x+...+n^x = n+\frac{n(n-1)}{2}x$ ....3 pct

Egalitate obține doar pentru $x \in \{0,1\}$ ....1 pct

Problema 2:

Deduce că funcția e injectivă..........2 pct

Notează $f(0)=a$ şi pentru $x=0$ obține $f(a)=0 \Rightarrow f(f(a)) = f(0) \Rightarrow 2^a - 1 = a$ ....2 pct

Obține $a \in \{0,1\}$ ....1 pct

Analog, notează $f(1)=b$ şi obține $b \in \{0,1\}$ ....1 pct

Foloseşte injectivitatea şi obține $f(0)+f(1)=1$ ....1 pct

Problema 3:

$z_1 = a+c-2b,\ z_2 = a+b-2c$ şi concluzia devine $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$ ....2 pct

Discută cazul $z_1 = 0$ sau $z_2 = 0$, inegalitate evidentă.......... 1 pct

Discută cazul $z_1 = z_2$ contradicție.......... 1 pct

Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_1+z_2)$, din ipoteză $OA \perp OB$ deci $OACB$ romb, deci $OC = AB$ ....3 pct

Problema 4:

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm , de exemplu , $x = \frac{4^n - 1}{4^n}, y = \frac{1}{4^n} \in (0, \infty)$ şi avem astfel :

$\log_2(x+y) = \log_2 1 = 0 \in M$, de unde ajungem la $\log_4 4^{-n} = -n \in M$ .... 2 pct

Pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, putem considera $x = \log_3 n$ şi $y = \log_3\left(\frac{1}{n} \cdot 3^{2^{-n}}\right)$ şi obținem astfel :

$\log_2(x+y) = -n \in M$, de unde : $3^x = 3^{\log_3 n} = n \in M$ ....2 pct

Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{m}{n} > 1$ şi $\frac{n}{m} \cdot 3^{2^n} > 1$ alegem $x = \log_3 \frac{m}{n}$ şi $y = \log_3\left(\frac{n}{m} \cdot 3^{2^n}\right)$, de unde

imediat avem : $\log_2(x+y) = \log_2\left(\log_3 \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} \cdot 3^{2^n}\right) = n \in M$ şi astfel ajungem la $\frac{m}{n} \in M$ ....3 pct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 18.02.2012

Clasa a XI-a
BAREME

Problema 1:

Dacă $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, se deduce $AX=XA$, şi astfel se ajunge la $X=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$ ……………………..2 pct

Ecuația din enunț conduce la sistemul $\begin{cases}a^3+3ab^2+a^2+b^2=1\\3a^2b+b^3+2ab=1\end{cases}$ …………………………… 1 pct

$a=b$ sau $a=b-1$ ……………………………………………………………………….. 2 pct

$X_1=\frac{1}{2}\cdot A$, $X_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ……………………………………………………………….. 2 pct

Problema 2:

$x_{n+1}-x_n=\ln(n+1)-\ln n,\quad n\ge 1$ ………………………………………………………… 1 pct

$x_n=a+\ln n$ ……………………………………………………………………………..………2 pct

(x_n) are limita $+\infty$, deci este divergent ……………….……………………………………2 pct

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{n+1-n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, concluzia …………………………………………………...…2 pct

Problema 3:

Obține $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x+\sin^2 2x-2}{\cos^2 2x+\cos 2x}$ ....2 pct

Obține $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\sin 2x-\sin\frac{\pi}{2}\right)(\sin 2x+2)}{\left(\cos 2x-\cos\frac{\pi}{2}\right)(\cos 2x+1)}$ ....2 pct

Transformă în produs şi apoi calculează şi obține limita 0. ....2 pct

Problema 4:

Presupunem că $\det A>-1$ şi cum $\det A\in\mathbb{Z}\Rightarrow\det A\ge 0$ ………………………………………2 pct

$\det(A+A^{-1})<0\,\big|\cdot\det A\Rightarrow\det\left(A^2+I_1\right)<0$ ……………………………………………..2 pct

$\det(A+iI_2)\det(A-iI_2)<0\Leftrightarrow\left|\det\left(A+iI_2\right)\right|^2<0$, contradicție………………………………3 pct

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIȚA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
http://cs.isj.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 18.02.2012

Clasa a XII-a
BAREME

Problema 1:

a) Integrând prin părți se obține $f(2)=1-\frac{2}{e}$ ....2 pct

b) $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt \le \int_0^1 t^{x-1}dt=\frac{1}{x}$. ....2 pct

c) $f(x+1)=\int_0^1\left(-e^{-t}\right)' t^x dt=-e^{-t}\cdot t^x \big|_0^1+\int_0^1 e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}dt=\frac{-1}{e}+x\cdot f(x), x>1$ ....3 pct

Problema 2:

Presupunem că există $a\in\mathbb{N}$ cu $\hat{a}+\hat{a}=\hat{1}$, atunci n divide $2a-1$, deci n impar.............................3 pct
Cum $(4,n)=1$ obținem că n este inversabil în $\mathbb{Z}_n$
Deci, $\exists x\in\mathbb{Z}_n$ cu $\hat{4}x=\hat{1}\Rightarrow x+x+x+x=\hat{1}$, contradicție...

Problema 3:

a) Se arată că $e^x\ge x+1,\forall x\in\mathbb{R}$ şi cum $\sin x\ge -1,\forall x\in\mathbb{R}$ ....2 pct
Se arată că egalitatea nu poate avea loc simultan...1 pct

b) $\int\frac{\sin x-\cos x}{e^x+\sin x}dx=\int\frac{e^x+\sin x-e^x-\cos x}{e^x+\sin x}dx=x-\int\frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}dx=x-\ln\left|e^x+\sin x\right|+C$ ....2 pct

c) $\int_1^e\frac{1}{e^x+\sin x}dx<\int_1^e\frac{1}{x}dx=1$ ....2 pct

Problema 4:

$x=e\Rightarrow f\left(f\left(y\right)\right)=yf\left(e\right),\forall y\in G\Rightarrow f$ injectivă ....2 pct
$y=e\Rightarrow f\left(xf\left(x\right)\right)=f\left(x^2\right)$, din f injectivă $\Rightarrow f\left(x\right)=x,\forall x\in G$ ....2 pct
Obține $x^2y=yx^2,\forall x,y\in G\Rightarrow x^{2n+2}y=yx^{2n+2},\forall x,y\in G$ ....2 pct
Din $x^{2n+1}=e\Rightarrow xy=yx,\forall x,y\in G$ ....2 pct