



Olimpiada de matematică  
Etapa locală, Caraș-Severin, 18.02.2012

### Clasa a IX-a

#### Problema 1:

a) Arătați că, pentru orice numere reale  $x, y$  pozitive nenule este adevărată inegalitatea:

$$\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} \leq 1.$$

b) Demonstrați că, pentru orice numere reale  $a, b, c$  pozitive, nenule pentru care  $a+b+c=1$ , este adevărată inegalitatea:

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{abc}.$$

*Gazeta Matematică 12 / 2011*

#### Problema 2:

a) Determinați cel mai mic număr întreg  $m$  pentru care ecuația  $|x-1| + |x-3| = m$  are exact două soluții întregi.

b) Să se rezolve ecuația  $\left[\frac{x+1}{3}\right] + \left[\frac{x+2}{3}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right] + \frac{x-1}{2}$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

#### Problema 3:

Fie  $D, E, F$  punctele de intersecție ale bisectoarelor triunghiului  $ABC$  cu laturile  $BC, CA$  respectiv  $AB$ . Arătați că:  $\overline{AF} + \overline{BD} + \overline{CE} = \overline{EA} + \overline{DC} + \overline{FB}$  dacă și numai dacă triunghiul  $ABC$  este echilateral.

#### Problema 4:

Să se arate că pentru orice număr natural  $n, n \geq 4$ , există  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numere naturale pare

distincte astfel ca:  $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ .

*Gazeta Matematică 5 / 2011*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.



Olimpiada de matematică  
Etapa locală, Caraș-Severin, 18.02.2012

**CLASA A X-A**

**Problema 1:**

a) Arătați că  $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Rezolvați ecuația  $1^x + 2^x + 3^x + \dots + n^x = n + \frac{n(n-1)}{2}x$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Problema 2:**

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea că  $f(f(x)) = 2^x - 1, x \in \mathbb{R}$ . Să se calculeze  $f(0) + f(1)$ .

*Gazeta Matematică 10 / 2011*

**Problema 3:**

Fie  $a, b, c$  numere complexe distincte două câte două. Să se arate că, dacă există  $\lambda \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a + c - 2b = \lambda i(a + b - 2c)$ , atunci  $|b + c - 2a| = 3|b - c|$

*Gazeta Matematică 2 / 2011*

**Problema 4:**

Se consideră o mulțime  $M$  de numere reale care satisface proprietățile :

a)  $0 \in M$  ;

b) Dacă  $x + y \in (0, \infty)$  și  $\log_2(x + y) \in M$ , atunci  $3^x \in M$  și  $\log_4 y \in M$ .

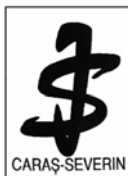
Arătați că  $\frac{2011}{2012} \in M$ .

*Gazeta Matematică 12 / 2011*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.



Olimpiada de matematică  
Etapa locală, Caraș-Severin, 18.02.2012

## Clasa a XI-a

**Problema 1:** Rezolvați în  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ecuația  $X^3 + X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

*RMT 4/2011*

**Problema 2:**

Considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  de numere reale definit prin:  $x_1 = a > 0$ ,  $x_{n+1} - \ln(n+1) = x_n - \ln n$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Studiați convergența șirurilor  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(y_n)_{n \geq 1}$ , unde  $y_n = \frac{x_n}{n}$ ,  $n \geq 1$ .

*RMCS 30/2009*

**Problema 3:**

Calculați  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos^2 2x - 1}{\cos^2 2x + 2 \cos^2 x - 1}$

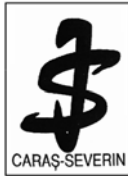
**Problema 4:**

Fie  $A \in M_2(\mathbb{Z})$  o matrice inversabilă pentru care  $\det(A + A^{-1}) < 0$ . Arătați că  $\det A \leq -1$

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.



Olimpiada de matematică  
Etapa locală, Caraș-Severin, 18.02.2012

### Clasa a XII-a

#### Problema 1:

Se consideră funcția  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ .

- Să se calculeze  $f(2)$ .
- Să se arate că  $f(x) \leq \frac{1}{x}$ ,  $\forall x > 1$ .
- Să se demonstreze relația  $f(x+1) = xf(x) - \frac{1}{e}$ ,  $\forall x > 1$ .

#### Problema 2:

Fie  $n$  un număr natural,  $n \geq 2$ . Să se arate că dacă ecuația  $x + x + x + x = \hat{1}$  nu are soluții în  $\mathbb{Z}_n$ , atunci ecuația  $x + x = \hat{1}$  nu are soluții în  $\mathbb{Z}_n$ .

G.M. 3 / 2011

#### Problema 3:

- Să se arate că :  $e^x + \sin x > x$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ ;
- Să se determine primitivele funcției  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x + \sin x}$ ;
- Să se arate că :  $\int_1^e \frac{1}{e^x + \sin x} dx < 1$ .

#### Problema 4:

Fie  $G$  un grup multiplicativ cu  $2n+1$  elemente. Arătați că, dacă există o funcție  $f : G \rightarrow G$  cu proprietatea că  $f(xf(xy)) = yf(x^2)$ , pentru orice  $x, y \in G$ , atunci grupul este comutativ.

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.