Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 18.02.2012

Clasa a IX-a

Problema 1:

a) Arătați că, pentru orice numere reale x, y pozitive nenule este adevărată inegalitatea:

$$\frac{2}{x+y}-\frac{1}{xy}\leq 1.$$

b) Demonstrați că, pentru orice numere reale a,b,c pozitive, nenule pentru care $a+b+c=1$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a}+\frac{1+c}{a+b}\leq\frac{1}{abc}.$$

Gazeta Matematică 12 / 2011

Problema 2:

a) Determinați cel mai mic număr întreg *m* pentru care ecuația $|x-1|+|x-3|=m$ are exact două soluții întregi.

b) Să se rezolve ecuația $\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\frac{x-1}{2}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Problema 3:

Fie D, E, F punctele de intersecție ale bisectoarelor triunghiului ABC cu laturile BC, CA respectiv AB. Arătați că: $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{FB}$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Problema 4:

Să se arate că pentru orice număr natural n, $n\geq 4$, există $a_1, a_2, ..., a_n$ numere naturale pare distincte astfel ca: $1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...\frac{1}{a_n}$.

Gazeta Matematică 5 / 2011

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 18.02.2012

CLASA A X-A

Problema 1:

a) Arătați că $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall x>0, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Rezolvați ecuația $1^x+2^x+3^x+...+n^x=n+\frac{n(n-1)}{2}x$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(f(x))=2^x-1, x\in\mathbb{R}$. Să se calculeze $f(0)+f(1)$.

Gazeta Matematică 10 / 2011

Problema 3:

Fie a,b,c numere complexe distinctce două câte două. Să se arate că, dacă există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $a+c-2b=\lambda i(a+b-2c)$, atunci $|b+c-2a|=3|b-c|$

Gazeta Matematică 2 / 2011

Problema 4:

Se consideră o mulțime M de numere reale care satisface proprietățile :

a) $0\in M$;

b) Dacă $x+y\in(0,\infty)$ şi $\log_2(x+y)\in M$, atunci $3^x\in M$ şi $\log_4 y\in M$.

Arătați că $\frac{2011}{2012}\in M$.

Gazeta Matematică 12 / 2011

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 18.02.2012

Clasa a XI-a

Problema 1: Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 + X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

RMT 4/2011

Problema 2:

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale definit prin: $x_1 = a > 0,\ x_{n+1} - \ln(n+1) = x_n - \ln n$, $\forall n \geq 1$.

Studiați convergența şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$, unde $y_n = \dfrac{x_n}{n}, n \geq 1$.

RMCS 30/2009

Problema 3:

Calculați $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - \cos^2 2x - 1}{\cos^2 2x + 2\cos^2 x - 1}$

Problema 4:

Fie $A \in M_2(\mathbb{Z})$ o matrice inversabilă pentru care $\det(A + A^{-1}) < 0$. Arătați că $\det A \leq -1$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 18.02.2012

Clasa a XII-a

Problema 1:

Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$.

a) Să se calculeze $f(2)$.

b) Să se arate că $f(x)\le\frac{1}{x},\forall x>1$.

c) Să se demonstreze relația $f(x+1)=xf(x)-\frac{1}{e},\ \forall x>1$.

Problema 2:

Fie n un număr natural, $n\ge 2$. Să se arate că dacă ecuația $x+x+x+x=\hat{1}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_n$, atunci ecuația $x+x=\hat{1}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_n$.

G.M. 3 / 2011

Problema 3:

a) Să se arate că : $e^x+\sin x>x$, $\forall x\in\mathbf{R}$;

b) Să se determine primitivele funcției $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{e^x+\sin x}$;

c) Să se arate că : $\int_1^e\frac{1}{e^x+\sin x}dx<1$.

Problema 4:

Fie G un grup multiplicativ cu $2n+1$ elemente. Arătați că, dacă există o funcție $f:G\to G$ cu proprietatea că $f\left(xf\left(xy\right)\right)=yf\left(x^2\right)$, pentru orice $x,y\in G$, atunci grupul este comutativ.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIȚA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
http://cs.isj.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro