INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIȚA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală Dâmbovița, 18 februarie 2012

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

a) Calculaţi $(2^5 \cdot 2^8)^4 : 32^9 - 81^7 : 27^6 : 9^4$

b) Comparaţi numerele $a=3^{2012}$ şi $b=4^{603} \cdot 5^{804}$

Cristian Grecu

SUBIECTUL 2

a) Fie numărul

$$A=\left(\frac{\overline{ab}+\overline{ba}}{a+b}\right)^2+\left(\frac{\overline{bc}+\overline{cb}}{b+c}\right)^2+\left(\frac{\overline{ca}+\overline{ac}}{c+a}\right)^2+\left(\frac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{a+b+c}\right)^2$$

Să se arate că A este pătrat perfect.

b) Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$ şi x,y numere naturale ştiind că

$$4(\overline{abc}+7^x)=2013-6^y$$

Cristian Grecu

SUBIECTUL 3

Fie numerele $m=1+3+3^2+3^3+...+3^{2012}$ şi $n=1+7+7^2+7^3+...+7^{2012}$

Arătaţi că $m \cdot n$ se divide cu un număr natural care este cub perfect.

Cristian Grecu

SUBIECTUL 4

Cinci fraţi au împreună 79 de ani. Vârsta primului este $\frac{1}{7}$ din vârsta ultimului, iar $\frac{1}{2}$ din vârsta ceJui de-al doilea este $\frac{1}{4}$ din vârsta ultimului. Dacă mărim cu 17 ani vârsta primului, atunci media aritmetică a vârstelor primilor trei fraţi este egală cu vârsta celui de-al patrulea, iar dublul vârstei acestuia întrece cu 6 ani vârsta ultimului.

Să se afle vârstele celor cinci fraţi.

***

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIȚA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală Dâmbovița, 18 februarie 2012

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) Se considerăa şirul de numere a $_1$, a $_2$,...,a $_n$, n$\in$ N cu proprietatea că a $_1$= 0 şi a $_n$ este media aritmetică a numerelor a $_{n-1}$ şi 2012 pentru orice n natural ,n$\geq$2. Dacă S $_n$ este suma primilor n termeni ai şirului, arătaţi că S $_{2012}$ +a $_{2012}$ poate fi scris ca produsul a două numere naturale consecutive.

b) Aflaţi numerele naturale a ,b care verifică relaţia $\frac{a^2}{1006}=\frac{2}{b^2-26}$

Cristian Grecu

SUBIECTUL 2

a) Se consideră numărul A=$\frac{2012a+11b}{2011a+12b}$, a,b$\in N$. Să se arate că dacă A$\in N$ atunci a=b.

b) Arătaţi că 23| $\overline{abcd}$ $\Leftrightarrow$ 23|11a+8b+$\overline{cd}$.

Cristian Grecu

SUBIECTUL 3

Suplementele complementelor a 13 unghiuri cu măsurile exprimate prin numere naturale au suma măsurilor de 1259^{O} . Arătaţi că măcar două unghiuri sunt congruente.

Cristian Grecu

SUBIECTUL 4

Pe dreapta d se consideră punctele A,B,C,D,E,F, în această ordine astfel încât AB=BC, BD=DE, CE=EF, iar AF = 48 cm.

a) Calculaţi lungimea segmentului [DE]

b) Dacă în plus mijlocul segmentului [DE] coincide cu mijlocul [AF] calculaţi AB şi EF.

***

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIȚA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală Dâmbovița, 18 februarie 2012

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că numărul $\sqrt{n^{2012}+2012}$ este număr iraţional oricare ar fi numărul natural n.

b) Să se afle numerele naturale n cu proprietatea că n+$\sqrt{n^2+2012}$ să fie raţional.

Cristian Grecu

SUBIECTUL 2

a) Fie numărul A=$\dfrac{\sqrt{16-\sqrt{60}}-\sqrt{9-\sqrt{72}}-\sqrt{7-\sqrt{40}}}{\sqrt{17-\sqrt{120}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}+\sqrt{8+\sqrt{60}}}$

Calculaţi $\left(1+\dfrac{A}{\sqrt{3}}\right)^{2012}$

b) Dacă a,b$\geq$0, arătaţi că $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{8}}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$

Cristian Grecu

SUBIECTUL 3

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D,E astfel ca BD=DE=EC. Se notează cu F simetricul lui A faţa de B, AD$\cap$FC={G}, EG$\cap$AB={H}. Arătaţi că FH=AB.

***

SUBIECTUL 4

Fie trapezul ABCD, AB||CD AB>CD cu diagonalele AC şi BD perpendiculare,AC$\cap$BD={O}. Dacă M este mijlocul liniei mijlocii a trapezului arătaţi că

$$8\cdot OM^2<AD^2+BC^2$$

Cristian Grecu

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIȚA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală Dâmbovița, 18 februarie 2012

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

a) Să se arate că $\sqrt{x+\sqrt{x}} < \sqrt{x} + \frac{1}{2}$, x>0;

b) Să se arate că

$$\frac{1}{2\sqrt{1}(\sqrt{1+\sqrt{1}}+\sqrt{1})} + \frac{1}{3\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2})} + \frac{1}{4\sqrt{3}(\sqrt{3+\sqrt{3}}+\sqrt{3})} + \ldots + \frac{1}{2013\cdot\sqrt{2012}(\sqrt{2012+\sqrt{2012}}+\sqrt{2012})} < \frac{1006}{2013}$$

Cristian Grecu

SUBIECTUL 2

a) Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a^3+b^3+c^3=1$. Arătaţi că :
$\sqrt{a^6+4b^3+4c^3} + \sqrt{b^6+4c^3+4a^3} + \sqrt{c^6+4a^3+4b^3} = 5$

b) Să se arate că dacă $a,b,c \in (0,\infty)$ atunci avem inegalitatea:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$$

Cristian Grecu

SUBIECTUL 3

În triunghiul ABC, dreptunghic în A, $AD \perp BC$, $DE \perp AB$, $D \in BC$, $E \in AB$. Pe perpendiculara în A pe planul (ABC) se ia un punct P. Se notează cu M mijlocul segmentului PD şi cu F mijlocul segmentului CD. Să se arate că:

a) Triunghiul MAE este isoscel
b) $AB \perp MF$
c) Să se determine poziţia punctului P pe perpendiculara pe planul (ABC) astfel încât măsura unghiului dintre planele MAE şi ABC este de 45°.

***

SUBIECTUL 4

Fie ABCDA'B'C'D' un cub cu muchia *a*. Fie $A'D \cap AD' = \{O\}$ şi M mijlocul lui AB.

a) Arătaţi că MO ||(DBD')
b) Aflaţi tangenta unghiului dintre planele MA'C' şi A'DC'.

Cristian Grecu