BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a V-a

1. a) Aflaţi câte cifre s-au folosit pentru scrierea numărului $A = 122223222422225...9\underbrace{222...2}_{9\text{ cifre}}$.

b) Determinaţi cifra de pe poziţia 2011 a numărului: $B = 1222232224222252222226...2011\underbrace{222...2}_{2011\text{ cifre}}$.

(***)

Barem:

a) $A = 1\underbrace{2}_{1\text{ cifră}}2\underbrace{22}_{2\text{ cifre}}3\underbrace{222}_{3\text{ cifre}}4\underbrace{2222}_{4\text{ cifre}}5...9\underbrace{222...2}_{9\text{ cifre}}$	1p
Pentru scrierea lui A s-au folosit $9\cdot 1+1+2+3+...+9=54$ cifre.	2p
b) Pentru $1\underbrace{2}_{1\text{ cifră}}2\underbrace{22}_{2\text{ cifre}}3\underbrace{222}_{3\text{ cifre}}4\underbrace{2222}_{4\text{ cifre}}5...9\underbrace{222...2}_{9\text{ cifre}}$ s-au folosit 54 cifre şi mai rămân încă $2011-54=1957$ cifre de scris.	1p
Pentru $10\underbrace{222...2}_{10\text{ cifre}}11\underbrace{222...2}_{11\text{ cifre}}...61\underbrace{222...2}_{61\text{ cifre}}$ se folosesc $52\cdot 2+10+11+12+...+61=104+(61\cdot 62):2-(9\cdot 10):2=1950$ cifre.	2p
Atunci se mai scriu încă 7 cifre, adică $62\underbrace{222...2}_{5\text{ cifre}}$. Deci cifra de pe poziţia 2011 este 2.	1p

2. Aflaţi numerele $\overline{ab}$ ştiind că $a^4+a^2=5b$.

G. M. Nr. 4/2011

Barem:

Cum b cifră rezultă $b\le 9$, deci $5b\le 45$.	2p
Atunci $a^4\le 45$, de unde $a\le 2$. Dar a cifră nenulă şi atunci a poate fi doar 1 sau 2.	2p
Pentru $a=1$ găsim $5b=2$ care nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale.	1p
Pentru $a=2$ obţinem $5b=20 \Leftrightarrow b=4$	1p
În concluzie, $\overline{ab}=24$.	1p

3. Se consideră numerele A=suma cifrelor numărului 2010^{2011}, B=suma cifrelor lui A şi C suma cifrelor lui B. Să se arate că:

a) pentru orice număr $N=\overline{a_1a_2...a_p}, p\in\mathbb{N}^*$, numărul N şi suma cifrelor sale dau acelaşi rest la împărţirea cu 9;

b) 2010^{2011} are cel mult 8044 cifre;

c) A are cel mult 5 cifre;

d) $B\le 43$;

e) $C\le 12$;

f) calculaţi valoarea lui C.

Revista Sinus Nr. 2-3 (20-21)/2011

Barem:

a) Pentru că $10^k=M_9+1$ avem $N=\overline{a_1a_2...a_p}=a_1\cdot 10^{p-1}+a_2\cdot 10^{p-2}+...+a_p=a_1\cdot(M_9+1)+a_2\cdot(M_9+1)+...+a_p=M_9+a_1+a_2+...+a_p$. Dacă $a_1+a_2+...+a_p=M_9+r$, cu $0\le r\le 8\Rightarrow N=M_9+r, 0\le r\le 8$ adică restul împărţirii lui N la 9 este tot r.	2p
b) Cum $2010^{2011}<10000^{2011}=10^{8044}$ deducem că 2010^{2011} are cel mult 8044 cifre, adică $2010^{2011}=\overline{a_1a_2...a_k}, k\le 8044$.	1p
c) $A=a_1+a_2+...+a_p\le 9\cdot 8044=72396$, deci A are cel mult 5 cifre.	1p
d) $A=\overline{b_1b_2...b_k}, k\le 5$ şi deci $B=b_1+b_2+...+b_k$ cu $b_1\le 7$ şi $b_2,b_3,...,b_k\le 9$. Rezultă că $B\le 7+4\cdot 9=43$.	1p
e) Avem $C=\overline{c_1c_2}$ cu $c_1\le 4$ şi $c_2\le 9$ de unde $C=c_1+c_2\le 3+9=12$.	1p
f) $2010^{2011}=3^{2011}\cdot 670^{2011}\vdots 9$. Dar 2010^{2011}, A, B, C dau acelaşi rest la împărţirea cu 9 (conform punctului a)) şi $C\le 12$ rezultă că $C=9$.	1p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.