BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $M_n = \{x \in \mathbb{Z} / |4(1-n)-x| \le 2n-1\}$

a) Calculați M_1, M_2 și $cardM_{2011}$.

b) Arătați că oricare ar fi $k, p \in \mathbb{N}^*$ cu $p \ne k$ avem $M_k - M_p \ne \emptyset$.

(***)

Barem:

a) Pentru M_1 avem $\|-x\| \le 1 \Leftrightarrow \|x\| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$. Dar $x \in \mathbb{Z}$ și atunci $M_1 = \{-1, 0, 1\}$.	1p
Pentru M_2 avem $\|-4-x\| \le 3 \Leftrightarrow \|x+4\| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x+4 \le 3 \Leftrightarrow -7 \le x+4 \le -1$. Dar $x \in \mathbb{Z}$ și atunci $M_2 = \{-7, -6, ..., -1\}$	1p
Pentru M_{2011} avem $\|-8040-x\| \le 4021 \Leftrightarrow \|8040+x\| \le 4021 \Leftrightarrow -4021 \le x+8040 \le 4021 \Leftrightarrow -12061 \le x \le -4019$. Dar $x \in \mathbb{Z}$ și atunci $M_{2011} = \{-12061, -12060, ..., -4019\}$. Deci $cardM_{2011} = 12061 - 4018 = 8043$.	2p
b) Pentru M_n avem $\|4(1-n)-x\| \le 2n-1 \Leftrightarrow -6n+5 \le x \le -2n+3$ cu $x \in \mathbb{Z}$.	1p
Presupunem prin reducere la absurd că există $k, p \in \mathbb{N}^*$ cu $p \ne k$ și $M_k - M_p = \emptyset \Rightarrow M_k \subset M_p$.	1p
$\Rightarrow \begin{cases} -6p+5 \le -6k+5 \\ 3-2k \le 3-2p \end{cases} \Rightarrow k = p$, absurd. Deci presupunerea făcută este falsă.	1p

2. Fie $A \subset \mathbb{Z}$ o mulțime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, cu proprietatea că oricare ar fi $x \in A$, atunci $-x \in A$. Dacă $n \ge 2$, fiecare element $x_i \in A$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se înmulțește cu suma celorlalte elemente din A și se obține produsul P_i. Notăm $S_A = P_1 + P_2 + ... + P_n$.

a) Dacă $n = 2011$, aflați produsul elementelor mulțimii *A*.

b) Determinați semnul lui S_A.

c) Determinați mulțimea *A* cu cel mai mare număr de elemente, astfel încât $S_A > -50$.

(***)

Barem:

a) $n = 2011$ impar $\Rightarrow 0 \in A$, deci produsul este 0.	1p
b) $S = x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$	1p
$P_i = x_i(S - x_i) = -x_i^2$, deci $S_A < 0$	1p
c) $0 \in A$, deci $n = 2k+1$	1p
$S_A = -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) > -50$	1p
$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 < 25$	1p
$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ sau $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$	1p

3. În triunghiul *ABC* fie *M*, *N* și *P* mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$ respectiv $[BC]$. Fie $D \in (PN$ și $E \in (CM$ astfel încât $[PN] \equiv [ND]$ și $[CM] \equiv [ME]$.

a) Arătați că punctele *E*, *A*, *D* sunt coliniare.

b) Dacă *F* este mijlocul lui $[AE]$ arătați că punctele *F*, *M*, *P*, coliniare.

c) Dacă $Q \in (FA)$ și $BQ \cap AC = \{T\}$, demonstrați că triunghiurile *EQT* și *QAC* sunt echivalente (au aceeași arie).

Revista Sinus Nr. 1 (19) / 2011

Barem:

a) Se arată că *EACB* și *ADCP* paralelograme	1p
Atunci $AE \parallel BC$ și $AD \parallel BC \Rightarrow E, A, D$ coliniare (din axioma paralelelor)	1p
b) $[FM]$ linie mijocie în ΔEAC, $[MP]$ linie mijlocie în ΔABC	1p
Atunci $FM \parallel AC$ și $MP \parallel AC \Rightarrow F, M, P$ coliniare (din axioma paralelelor)	1p
c) $A_{EQT} = A_{ETB} - A_{EQB} = \dfrac{EB \cdot dist(T, EB)}{2} - A_{EQB} = \dfrac{EB \cdot dist(AC, EB)}{2} - A_{EQB} = \dfrac{A_{AEBC}}{2} - A_{EQB}$	1p
$A_{AQC} = A_{AEBC} - A_{QBC} - A_{EQB} = A_{AEBC} - \dfrac{BC \cdot dist(Q, BC)}{2} - A_{EQB} = A_{AEBC} - \dfrac{BC \cdot dist(AE, BC)}{2} - A_{EQB} =$ $= A_{AEBC} - \dfrac{A_{AEBC}}{2} - A_{EQB} = \dfrac{A_{AEBC}}{2} - A_{EQB} = A_{EQT}$	2p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.