Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa SSMR Filiala Dâmboviţa

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală Dâmboviţa, 18 februarie 2012
CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie n un număr natural de forma $n = 4k$ sau $n = 4k + 1$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $m = [n/2]$. Demonstraţi că

$$\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + ... + \left[\frac{m-1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] = \left(\left[\frac{n}{4}\right]\right)^2$$

(pentru orice număr real x, am notat cu $[x]$ partea sa întreagă).

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 2. Fie a, b, $c \in (0, 1)$ cu $a + b + c = 1$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}} \geq 3.$$

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Subiectul 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, $\{P\} = AC \cap BD$, cu proprietatea că lungimile laturilor AB, BC, CD, DA sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Demonstraţi că $PA = PC$.

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Subiectul 4. Se colorează punctele planului în 4 culori (folosind toate aceste culori). Demonstraţi că există o dreaptă pe care se găsesc puncte de cel puţin 3 culori.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa SSMR Filiala Dâmboviţa

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală Dâmboviţa, 18 februarie 2012
CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie a, b, $c \in (1, \infty)$ astfel încât $a + b + c = 9$. Demonstraţi că

$$\sqrt{\log_3 (a^b) + \log_3 (a^c)} + \sqrt{\log_3 (b^a) + \log_3 (b^c)} + \sqrt{\log_3 (c^a) + \log_3 (c^b)} \le 3\sqrt{6}.$$

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Subiectul 2. Fie mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 9^x + 3^x + 3^{-x} = 4\}$. Demonstraţi că pentru orice element $a \in A$, avem şi $\log_3 (9^a + 3^a - 3) \in A$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 3. a) Fie a, b, $t \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \le a \sin t + b \cos t \le \sqrt{a^2 + b^2}.$$

b) Determinaţi cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia

$$E = (1 - \cos x + y)^2 + (1 + \sin x - y)^2, \text{ pentru } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 4. Fie z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ şi

$$z = (1 - a) z_1 + a z_3 = (1 - b) z_2 + b z_4, \quad \text{cu} \ \ a,\ b \in (0, 1).$$

Numerele $|z_1 - z_2|$, $|z_2 - z_3|$, $|z_3 - z_4|$, $|z_4 - z_1|$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Demonstraţi că $|z - z_1| = |z - z_3|$.

Dinu Teodorescu, Târgovişte

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală Dâmboviţa, 18 februarie 2012
CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, prin relaţiile

$$2nx_{n+1} = n^2 + x_n^2 \ , \quad \text{unde} \ \ x_1 \in \mathbb{R}^* \text{ este dat.}$$

Arătaţi că şirul $y_n = 1/x_n$ este monoton, iar şirul $z_n = \sqrt{n}/x_n$ este convergent.

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Subiectul 2. Demonstraţi că şirul $x_n = \log_{n-\frac{1}{2}}\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \geq 2$, este monoton. Determinaţi toate valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care mulţimea

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \mid \quad |x_n - a| \cdot \log_2\left(n - \frac{1}{2}\right) < 1 \right\} \quad \text{este infinită.}$$

Andrei Vernescu, Bucureşti

Subiectul 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demonstraţi că:
a) Dacă $a + d = 0$, atunci $A^{2k}B = BA^{2k}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.
b) Dacă $a + d \neq 0$ şi $A^2B = BA^2$, atunci $AB = BA$.
Daţi exemplu de matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2B = BA^2$ şi $AB \neq BA$.

Andrei Vernescu, Bucureşti

Subiectul 4. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, k, $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, $k \geq 1$, $n \geq 2$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu

$$A^k = \begin{pmatrix} x+y & x & ... & x \\ x & x+y & ... & x \\ ... & ... & ... & ... \\ x & x & ... & x+y \end{pmatrix}.$$

Demonstraţi că suma elementelor de pe coloana j a matricei A este egală cu suma elementelor de pe linia j a matricei A, oricare ar fi $1 \leq j \leq n$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală Dâmboviţa, 18 februarie 2012
CLASA A XII-A

Subiectul 1. Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_n = \int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right) dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx, \quad n \geq 1,$$

este monoton şi mărginit.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 2. a) Demonstraţi că

$$t^2 + \frac{2}{t} \geq 3, \text{ oricare ar fi } t > 0.$$

b) Găsiţi funcţiile continue $f : [0,1] \to [0,\infty)$ cu proprietatea că $f(0) \neq 0$ şi

$$\int_0^1 f(x)\, dx + \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x^2 + f(x)}} dx = \frac{8}{3}.$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 3. Pentru $a \in \mathbb{R}$ notăm $x * y = (x-1)(y-1) + a$, $x, y \in \mathbb{R}$ şi pentru $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ notăm $G_b = (1, b)$, respectiv $G_\infty = (1, \infty)$.
a) Demonstraţi că, în cazul când $a = 1$, $(G_\infty, *)$ este grup.
b) Demonstraţi că, dacă $(G_b, *)$ este grup, atunci $a = 1$ şi $b = \infty$.

* * *

Subiectul 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu cel puţin 4 elemente, cu elementul neutru notat cu e, având proprietatea că $xyz \neq e$, oricare ar fi x, y, $z \in G \setminus \{e\}$, astfel încât $x \neq y \neq z \neq x$. Demonstraţi că pentru orice x, $y \in G$ diferite, avem $x = y^{-2}$ sau $y = x^{-2}$. Daţi exemplu de un grup cu proprietatea de mai sus.

Marian Andronache, Bucureşti