

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a IX-a

1. Să se demonstreze că, pentru orice numere reale $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq 2 \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right) - \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Revista Sinus Nr. 3 (15)/2009

Barem:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$	1p
Deduce $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \Leftrightarrow \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \geq a + b + c$	2p
Aplică inegalitatea mediilor $\frac{a^3}{b^2} + a \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b^2} \cdot a} = 2\frac{a^2}{b}$ și analogele	2p
Deduce $\sum \frac{a^3}{b^2} + \sum a \geq 2\sum \frac{a^2}{b}$	1p
Finalizare $\sum \frac{a^3}{b^2} + \sqrt{3\sum a^2} \geq \sum \frac{a^3}{b^2} + \sum a \geq 2\sum \frac{a^2}{b}$	1p

2. Să se determine numerele naturale prime a, b, c , știind că $\frac{b+c-3}{a}, \frac{c+a-2}{b}, \frac{a+b-1}{c}$ sunt numere întregi.

Dan Popescu, Suceava

Barem:

a, b, c sunt numere prime $\Rightarrow a, b, c \geq 2$, deci rapoartele sunt naturale nenule	1p
Presupunem că toate rapoartele sunt ≥ 2 , de unde $b+c \geq 2a+3, c+a \geq 2b+2, a+b \geq 2c+1$ și prin adunarea celor trei inegalități obținem o contradicție, deci cel puțin un raport este egal cu 1	2p
Cazul I: $b+c-3=a \Rightarrow \frac{c+a-2}{b} = 1 + \frac{2c-5}{b}$ și $\frac{a+b-1}{c} = 1 + \frac{2b-4}{c}$	1p
Se demonstrează prin reducere la absurd că cel puțin una din fracțiile $\frac{2c-5}{b}, \frac{2b-4}{c}$ este egală cu 1. Considerând cele două situații nu se obțin soluții.	
Cazul II: $c+a-2=b$. Apelând la un raționament asemănător celui anterior nu obținem, de asemenea, nicio soluție.	1p
Cazul III: $a+b-1=c \Rightarrow \frac{2b+a-4}{4} = 1 + \frac{2b-4}{a}, \frac{2a+b-3}{b} = 1 + \frac{2a-3}{b}$	2p
Dacă $\frac{2b-4}{a} = 1$, obținem $b=11, a=18$ care nu convine. Dacă $\frac{2a-3}{b} = 1$ se obține singura soluție a problemei: $a=5, b=7, c=11$.	

3. Se consideră un triunghi oarecare ABC , cu $AB > AC$ și fie $E \in (AB)$. Mediatoarea segmentului $[AE]$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctul F astfel încât AB separă punctele C și F . Să se arate că $[AC] \equiv [BE] \Leftrightarrow [AF]$ este bisectoarea exterioară a $\sphericalangle BAC$.

Cristian Amorăriței, Suceava

Barem: Fie D punctul de intersecție al dreptei FE cu cercul circumscris triunghiului ABC și M mijlocul lui $[AE]$.

$m(\sphericalangle FAB) = m(\sphericalangle EDB)$ (notat α)	1p
FM mediatoarea segmentului $[AE] \Rightarrow m(\sphericalangle FEA) = m(\sphericalangle FAE) = \alpha \Rightarrow m(\sphericalangle BED) = \alpha$	1p
$\triangle BED$ isoscel, rezultă $[BE] \equiv [BD]$	2p
Fie $P \in AF \setminus [AF]$ și notăm $m(\sphericalangle PAC) = \beta$. Atunci avem: $m(\widehat{AC}) + m(\widehat{AF}) = 2\beta, m(\widehat{BD}) + m(\widehat{AF}) = 2\alpha$	1p
Avem: $[AC] \equiv [BE] \Leftrightarrow [AC] \equiv [BD] \Leftrightarrow m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD}) \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow (AF \text{ bisectoarea exterioară a unghiului } \sphericalangle BAC)$	2p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.