BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a IX-a

1. Să se demonstreze că, pentru orice numere reale $a,b,c>0$, are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge 2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)-\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Revista Sinus Nr. 3 (15)/2009

<u>*Barem:*</u>

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$	1p
Deduce $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge a+b+c$	2p
Aplică inegalitatea mediilor $\frac{a^3}{b^2}+a\ge 2\sqrt{\frac{a^3}{b^2}\cdot a}=2\frac{a^2}{b}$ și analoagele	2p
Deduce $\sum\frac{a^3}{b^2}+\sum a\ge 2\sum\frac{a^2}{b}$	1p
Finalizare $\sum\frac{a^3}{b^2}+\sqrt{3\sum a^2}\ge\sum\frac{a^3}{b^2}+\sum a\ge 2\sum\frac{a^2}{b}$	1p

2. Să se determine numerele naturale prime *a, b, c*, ştiind că $\frac{b+c-3}{a},\frac{c+a-2}{b},\ \frac{a+b-1}{c}$ sunt numere întregi.

Dan Popescu, Suceava

<u>*Barem:*</u>

a,b,c sunt numere prime $\Rightarrow a,b,c\ge 2$, deci rapoartele sunt naturale nenule	1p
Presupunem că toate rapoartele sunt ≥ 2, de unde $b+c\ge 2a+3, c+a\ge 2b+2, a+b\ge 2c+1$ și prin adunarea celor trei inegalități obținem o contradicție, deci cel puțin un raport este egal cu 1	2p
Cazul I: $b+c-3=a\Rightarrow\frac{c+a-2}{b}=1+\frac{2c-5}{b}$ și $\frac{a+b-1}{c}=1+\frac{2b-4}{c}$ Se demonstrează prin reducere la absurd că cel puțin una din fracțiile $\frac{2c-5}{b},\frac{2b-4}{c}$ este egală cu 1. Considerând cele două situații nu se obțin soluții.	1p
Cazul II: $c+a-2=b.$ Apelând la un raționament asemănător celui anterior nu obținem, de asemenea, nicio soluție.	1p
Cazul III: $a+b-1=c\Rightarrow\frac{2b+a-4}{4}=1+\frac{2b-4}{a},\frac{2a+b-3}{b}=1+\frac{2a-3}{b}$ Dacă $\frac{2b-4}{a}=1$, obținem $b=11, a=18$ care nu convine. Dacă $\frac{2a-3}{b}=1$ se obține singura soluție a problemei: $a=5, b=7, c=11$.	2p

3. Se consideră un triunghi oarecare *ABC*, cu *AB>AC* şi fie $E\in\left(AB\right)$. Mediatoarea segmentului $[AE]$ intersectează cercul circumscris triunghiului *ABC* în punctul *F* astfel încât *AB* separă punctele *C* şi *F*. Să se arate că $[AC]\equiv[BE]\Leftrightarrow[AF$ este bisectoarea exterioară a $\sphericalangle BAC$.

Cristian Amorăriței, Suceava

<u>*Barem:*</u> Fie D punctul de intersecție al dreptei FE cu cercul circumscris triunghiului ABC și M mijlocul lui $[AE]$.

$m\left(\sphericalangle FAB\right)=m\left(\sphericalangle EDB\right)$ (notat α)	1p
FM mediatoarea segmentului $\left[AE\right]\Rightarrow m\left(\sphericalangle FEA\right)=m\left(\sphericalangle FAE\right)=\alpha\Rightarrow m\left(\sphericalangle BED\right)=\alpha$	1p
$\triangle BED$ isoscel, rezultă $\left[BE\right]\equiv\left[BD\right]$	2p
Fie $P\in AF\setminus[AF$ și notăm $m\left(\sphericalangle PAC\right)=\beta$. Atunci avem: $m\left(\overset{\frown}{AC}\right)+m\left(\overset{\frown}{AF}\right)=2\beta,\ m\left(\overset{\frown}{BD}\right)+m\left(\overset{\frown}{AF}\right)=2\alpha$	1p
Avem: $[AC]\equiv[BE]\Leftrightarrow[AC]\equiv[BD]\Leftrightarrow m\left(\overset{\frown}{AC}\right)=m\left(\overset{\frown}{BD}\right)\Leftrightarrow\alpha=\beta\Leftrightarrow($*AF* bisectoare exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$	2p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.