Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

11 februarie 2012

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$2\cdot x\cdot y-3\cdot x+5\cdot y=7 \Leftrightarrow x=\dfrac{7-5y}{2y-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2y-3/7-5y;$ $\left.\begin{matrix}2y-3/7-5y\\2y-3/2y-3\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2y-3/1\Rightarrow 2y-3\in D_1=\{-1,1\}\Rightarrow y\in\{1,2\};$ $y=1\Rightarrow x=-2;$ $y=2\Rightarrow x=-3;$ $M=\{(-2,1),(-3,2)\}.$	3p
	$3\cdot x\cdot y-5\cdot x+7\cdot y=11\Rightarrow x=\dfrac{11-7y}{3y-5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 3y-5/11-7y;$ $\left.\begin{matrix}3y-5/11-7y\\3y-5/3y-5\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3y-5/2\Rightarrow 3y-5\in D_2=\{-1,1,-2,2\}\Rightarrow y\in\left\{2,\frac{4}{3},1,\frac{7}{3}\right\}\cap\mathbb{Z}\Rightarrow$ $y\in\{2,1\};$ $y=1\Rightarrow x=-2;$ $y=2\Rightarrow x=-3;$ $N=\{(-2,1),(-3,2)\}.$	3p
	M=N	1p
2.	$a_2=2$; $a_3=2+3+1=6=2\cdot3$; $a_4=6+5+1=12=3\cdot4$;… $a_n=(n-1)n, n\geq1$ - se demonstrează prin inducție matematică.	4p
	$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\sqrt{4a_3+1}+...+\sqrt{4a_n+1}=$ 1+3+5+7+...+(2n-1)= n^2, $(\forall)n\geq1$ (Ind. Mat. sau progresie aritmetică).	3p
3.	$\left[\sqrt{9\cdot n^2+k}\right]=\begin{cases}3\cdot n, & k\in\{1,2,...,6\cdot n\}\\3\cdot n+1, & k\in\{6\cdot n+1,...,12\cdot n+3\}\\3\cdot n+2, & k\in\{12\cdot n+4,...,18\cdot n+8\}\\3\cdot n+3, & k\in\{18\cdot n+9,..., 24\cdot n\}\end{cases}$	3p

	$(3\cdot n)\cdot(6\cdot n)+(3\cdot n+1)\cdot(6\cdot n+3)+(3\cdot n+2)\cdot(6\cdot n+5)+(3\cdot n+3)\cdot(6\cdot n-8)=349$	**2p**
	de unde se obține $72\cdot n^2+36\cdot n-11=349$, adică $72\cdot n^2+36\cdot n-360=0$, ecuație cu soluția naturală $n=2$.	**2p**
4.	$AB\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MT}\right)+BC\cdot\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NT}\right)+CA\cdot\left(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PT}\right)=\vec{0}$	**1p**
	Dar $AB\cdot\overrightarrow{AM}=AM\cdot\overrightarrow{AB}$ $BC\cdot\overrightarrow{BN}=BN\cdot\overrightarrow{BC}=AM\cdot\overrightarrow{BC}$ $CA\cdot\overrightarrow{CP}=CP\cdot\overrightarrow{CA}=AM\cdot\overrightarrow{CA}$	**1p**
	Rezultă că : $AB\cdot\overrightarrow{AM}+BC\cdot\overrightarrow{BN}+CA\cdot\overrightarrow{CP}=AM\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}\Rightarrow$ $AB\cdot\overrightarrow{MT}+BC\cdot\overrightarrow{NT}+CA\cdot\overrightarrow{PT}=\vec{0}$ (1)	**2p**
	Dar T este centrul de greutate al triunghiului $MNP.\Rightarrow\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{NT}+\overrightarrow{PT}=\vec{0}$ (2) Din (1)și 2)$\Rightarrow AB\left(-\overrightarrow{NT}-\overrightarrow{PT}\right)+BC\cdot\overrightarrow{NT}+CA\cdot\overrightarrow{PT}=\vec{0}$ $\Rightarrow(AB-BC)\overrightarrow{NT}+(CA-AB)\cdot\overrightarrow{PT}=\vec{0}$ Dar vectorii $\overrightarrow{NT}$ și $\overrightarrow{PT}$ nu sunt coliniari. Atunci, $AB=BC=CA$, adică triunghiul ABC este echilateral.	**1p** **1p** **1p**