

## Barem la clasa a V- a

**1. Determinați numerele naturale nenule  $a, b, c, d$  știind că  $a^2 + 6b^2 + 3c + 9d = 43$ .**

$$b = 1 \Rightarrow a^2 + 3c + 9d = 37$$

$$a = 1 \Rightarrow 3c + 9d = 36 \Leftrightarrow c + 3d = 12 \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \Rightarrow d = 3 \\ c = 6 \Rightarrow d = 3 \\ c = 9 \Rightarrow d = 9 \end{cases} \quad 1\text{p}$$

$$a = 2 \Rightarrow 3c + 9d = 33 \Leftrightarrow c + 3d = 11 \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \Rightarrow d = 3 \\ c = 5 \Rightarrow d = 2 \\ c = 8 \Rightarrow d = 1 \end{cases} \quad 1\text{p}$$

$$a = 3 \Rightarrow 3c + 9d = 28 \quad (F)$$

$$a = 4 \Rightarrow 3c + 9d = 21 \Leftrightarrow c + 3d = 7 \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \Rightarrow d = 2 \\ c = 4 \Rightarrow d = 1 \end{cases} \quad 1\text{p}$$

$$a = 5 \Rightarrow 3c + 9d = 18 \Leftrightarrow c + 3d = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow d = 1 \quad 1\text{p}$$

$$a = 6 \Rightarrow 3c + 9d = 7 \quad (F)$$

$$b = 2 \Rightarrow a^2 + 3c + 9d = 19 \quad 1\text{p}$$

$$a = 1 \Rightarrow 3c + 9d = 18 \Leftrightarrow c + 3d = 6 \Leftrightarrow c = 3 \Rightarrow d = 1$$

$$a = 2 \Rightarrow 3c + 9d = 15 \Leftrightarrow c + 3d = 5 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow d = 1$$

$$a = 3 \Rightarrow 3c + 9d = 10 \quad (F) \Leftrightarrow c = 3 \Rightarrow d = 1$$

$$a = 4 \Rightarrow 3c + 9d = 3 \quad (F) \Leftrightarrow c = 3 \Rightarrow d = 1 \quad 1\text{p}$$

$b \geq 3$  nu convine (1p).

**2. Fie numărul  $a = 7 + 97 + 997 + 9997 + \dots + \underbrace{999\dots97}_{2012}$ .**

**a) Să se determine câte cifre de 4 sunt folosite în scrierea numărului  $a$ ;**

**b) Să se determine restul împărțirii numărului  $a$  la 111.**

Numărul  $a$  se mai scrie

$$a = 10 - 3 + 100 - 3 + 1000 - 3 + \dots + \underbrace{100\dots0}_{2013} - 3 \quad 2\text{p}$$

$$a = \underbrace{11\dots10}_{2013} - 3 \cdot 2012 \quad 2\text{p}$$

$$a = \underbrace{11\dots10}_{2013} - 6036 \Rightarrow a = \underbrace{11\dots105074}_{2013} . \text{ Deci cifra 4 este folosită o singură dată. } \quad 1\text{p}$$

$$a = \underbrace{11\dots1}_{2007} 100000 + 105074, \Rightarrow \underbrace{11\dots1}_{2007} 100000 : 111 \text{ și } 105074 = 111 \cdot 946 + 68 \quad 1\text{p}$$

$$\Rightarrow a = 111 \cdot n + 68, n \in \mathbb{N} . \text{ Deci restul împărțirii la 111 este 68. } \quad 1\text{p}$$

**3. Se dau mulțimile**  $A = \{\overline{ab} \in \mathbb{N} / \overline{ab} \leq 3(a+b)\}$  **și**  $B = \{\overline{xy} \in \mathbb{N} / \overline{x1} + \overline{1y} - 4y = 3(x+y)\}$ .  
**Să se determine mulțimile**  $A \cap B$  **și**  $A - B$ .

$$\overline{ab} \leq 3(a+b) \Leftrightarrow 10a+b \leq 3a+3b \Leftrightarrow 7a \leq 2b \text{ de unde } \quad 2p$$

$$a=1 \Rightarrow b \in \{4,5,\dots,9\}$$

$$a=2 \Rightarrow b \in \{8,9\}$$

$$A = \{14,15,16,17,18,19\} \quad 1p$$

$$\overline{x1} + \overline{1y} - 4y = 3(x+y) \Leftrightarrow 10x+1+10+y-4y = 3x+3y \Leftrightarrow 1p$$

$$\Leftrightarrow 7x+11 = 6y \text{ de unde } \quad 1p$$

$$x=1 \Rightarrow 18 = 6y \Leftrightarrow y=3$$

$$x=2 \Rightarrow 28 = 6y \Leftrightarrow y \in \emptyset$$

$$x=3 \Rightarrow 32 = 6y \Leftrightarrow y \in \emptyset$$

...

$$x=9 \Rightarrow 84 = 6y \Leftrightarrow y \in \emptyset$$

$$B = \{13\} \quad 1p$$

$$A \cap B = \emptyset, A - B = A, A \cup B \quad 1p$$

**4. Arătați că:**

**a) Numărul**  $N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008}$  **este divizibil cu 15.**

**b) Numărul**  $\frac{1}{2} \cdot N + 1$  **este pătrat perfect.**

a) Sunt 2008 termeni  $\Rightarrow$  se pot grupa câte 4 termeni (1p). Fiecare grupare este de forma  
 $2^k \cdot (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) = 2^k \cdot 15$  (1p). Finalizare (1p)

b)  $\frac{1}{2} \cdot N = N - \frac{1}{2} \cdot N = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008}) - (1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2007}) = 2^{2008} - 1$  (3p).

$$\frac{1}{2} \cdot N + 1 = 2^{2008} = (2^{1004})^2 \quad (1p).$$