Barem la clasa a V- a

1. Determinaţi numerele naturale nenule *a, b, c, d* ştiind că $a^2+6b^2+3c+9d=43$ **.**

$b=1 \Rightarrow \quad a^2+3c+9d=37$

$$a=1 \Rightarrow 3c+9d=36 \Leftrightarrow c+3d=12 \Rightarrow \begin{cases} c=3 \Rightarrow d=3 \\ c=6 \Rightarrow d=3 \\ c=9 \Rightarrow d=9 \end{cases} \qquad 1p$$

$$a=2 \Rightarrow 3c+9d=33 \Leftrightarrow c+3d=11 \Rightarrow \begin{cases} c=2 \Rightarrow d=3 \\ c=5 \Rightarrow d=2 \\ c=8 \Rightarrow d=1 \end{cases} \qquad 1p$$

$a=3 \Rightarrow 3c+9d=28 \ (F)$

$$a=4 \Rightarrow 3c+9d=21 \Leftrightarrow c+3d=7 \Rightarrow \begin{cases} c=1 \Rightarrow d=2 \\ c=4 \Rightarrow d=1 \end{cases} \qquad 1p$$

$a=5 \Rightarrow 3c+9d=18 \Leftrightarrow c+3d=6 \Rightarrow c=3 \Rightarrow d=1$ 1p

$a=6 \Rightarrow 3c+9d=7 \ \ (F)$

$b=2 \Rightarrow \quad a^2+3c+9d=19$ 1p

$a=1 \Rightarrow 3c+9d=18 \Leftrightarrow c+3d=6 \Leftrightarrow c=3 \Rightarrow d=1$

$a=2 \Rightarrow 3c+9d=15 \Leftrightarrow c+3d=5 \Leftrightarrow c=2 \Rightarrow d=1$

$a=3 \Rightarrow 3c+9d=10 \quad (F) \Leftrightarrow c=3 \Rightarrow d=1$

$a=4 \Rightarrow 3c+9d=3 \ \ (F) \Leftrightarrow c=3 \Rightarrow d=1$ 1p

b$\geq$3 nu convine (1p).

2. Fie numărul *a* = 7 + 97 + 997 + 9997 + ….+ $\underbrace{999....97}_{2012}$ **.**

a) Să se determine câte cifre de 4 sunt folosite în scrierea numărului *a*;

b) Să se determine restul împărţirii numărului *a* la 111.

Numărul *a* se mai scrie

$a=10-3+100-3+1000-3+....+\underbrace{100....0}_{2013}-3$ 2p

$a=\underbrace{11....10}_{2013}-3\cdot 2012$ 2p

$a=\underbrace{11....10}_{2013}-6036 \Rightarrow a=\underbrace{11....105074}_{2013}$. Deci cifra 4 este folosită o singură dată. 1p

$a=\underbrace{11....1}_{2007}00000+105074, \Rightarrow \underbrace{11....1}_{2007}00000 \vdots 111$ şi $105074=111\cdot 946+68$ 1p

$\Rightarrow a=111\cdot n+68, n\in \mathbb{N}$. Deci restul împărţirii la 111 este 68. 1p

3. Se dau mulţimile $A=\left\{\overline{ab}\in\mathbb{N} / \overline{ab}\le 3(a+b)\right\}$ **şi** $B=\left\{\overline{xy}\in\mathbb{N} / \overline{x1}+\overline{1y}-4y=3(x+y)\right\}$**.**
Să se determine mulţimile $A\cap B$ **şi** $A-B$**.**

$\overline{ab}\le 3(a+b)\Leftrightarrow 10a+b\le 3a+3b\Leftrightarrow 7a\le 2b$ de unde 2p
$a=1\Rightarrow b\in\{4,5,\ldots,9\}$
$a=2\Rightarrow b\in\{8,9\}$
$A=\{14,15,16,17,18,19\}$ 1p
$\overline{x1}+\overline{1y}-4y=3(x+y)\Leftrightarrow 10x+1+10+y-4y=3x+3y\Leftrightarrow$ 1p
$\Leftrightarrow 7x+11=6y$ de unde 1p
$x=1\Rightarrow 18=6y\Leftrightarrow y=3$
$x=2\Rightarrow 28=6y\Leftrightarrow y\in\varnothing$
$x=3\Rightarrow 32=6y\Leftrightarrow y\in\varnothing$
$\ldots$
$x=9\Rightarrow 84=6y\Leftrightarrow y\in\varnothing$
$B=\{13\}$ 1p
$A\cap B=\varnothing$, $A-B=A$, $A\bigcup B$ 1p

4. Arătați că:

a) Numărul N = $2^1+2^2+2^3+....+2^{2008}$ **este divizibil cu 15.**
b) Numărul $\frac{1}{2}\cdot N+1$ **este pătrat perfect.**

a) Sunt 2008 termeni $\Rightarrow$ se pot grupa câte 4 termeni (1p). Fiecare grupare este de forma $2^k\cdot(1+2^1+2^2+2^3)=2^k\cdot 15$ (1p). Finalizare (1p)
b) $\frac{1}{2}\cdot N=N-\frac{1}{2}\cdot N=(2^1+2^2+2^3+....+2^{2008})-(1+2^1+2^2+....+2^{2007})=2^{2008}-1$ (3p).

$\frac{1}{2}\cdot N+1=2^{2008}=(2^{1004})^2$ (1p).