Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

11 februarie 2012

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Condiții: $a \neq 0; b \neq 0$.	1p
	$\overline{ab4} - \overline{b4} + \overline{5c} = 752 \Leftrightarrow 100a + \overline{b4} - \overline{b4} + 50 + c = 752$.	2p
	$\Leftrightarrow 100a + c = 702 \Leftrightarrow \overline{a0c} = 702$, deci $a = 7$ şi $c = 2$, iar $b \in \{1,2,3,...,9\}$.	3p
	Sunt 9 numere**. 712;722;,...,792.**	1p
2.	$A = \overline{3a} + \overline{a3} = 33 + 11 \cdot a = 11 \cdot (3 + a)$ este pătrat perfect dacă a+3=11 $\Rightarrow a$=8	3p
	$A = 11 \cdot (3 + a)$ este cub perfect daca a+3=11^2 – imposibil pentru ca a este cifra.	2p
	$a = 3$	2p
3.	a=$5 \cdot 3^{2012} = 5 \cdot 3^2 \cdot 3^{2010} = (14 \cdot 3 + 3) \cdot 3^{2010} = 14 \cdot 3 \cdot 3^{2010} + 3 \cdot 3^{2010} = 3 \cdot b + 3 \cdot 3^{2010}$, r=$3^{2011}$	3p
	b)r=3	2p
	c) r=4	2p
4.	Considerăm numerele naturale scrise în baza 10: $N_1 = c;\ N_2 = \overline{cc};\ N_3 = \overline{ccc};....N_{n+1} = \underbrace{\overline{cc...cc}}_{n+1 cifre}$. Conform teoremei împărțirii cu rest, $N_k = n \cdot q_k + r_k$, $r_k \in \{0,1,2,...,n-1\}$. Conform Principiului lui Dirichlet, printre cele $n+1$ numere $N_1, N_2, N_3, ..., N_{n+1}$, există cel puțin două care au acelaşi rest la împărțirea cu n. Prin urmare, printre resturile $r_1, r_2, r_3, ..., r_{n+1}$, există cel puțin două resturi egale. Fie acestea $r_m = r_p, m < p$.	3p

	Numărul $N = N_p - N_m = \left(n \cdot q_p + r_p\right) - \left(n \cdot q_m + r_m\right) = n \cdot \left(q_p - q_m\right)$. Rezultă că numărul N se divide cu n. $N = \underbrace{\overline{cc...cc}}_{p\ cifre} - \underbrace{\overline{cc...cc}}_{m\ cifre} = \overline{\underbrace{cc...cc}_{p-m\ cifre}\underbrace{00...00}_{m cifre}} = \underbrace{\overline{cc...cc}}_{p-m\ cifre} \cdot 10^m = \underbrace{\overline{cc...cc}}_{p-m\ cifre} \cdot 2^m \cdot 5^m$. Atunci $n \cdot \left(q_p - q_m\right) = \underbrace{\overline{cc...cc}}_{p-m\ cifre} \cdot 2^m \cdot 5^m$.	**2p**
	Dar numărul n este impar, prin urmare nu se divide cu 2. $U\left(n\right) \in \left\{1,3,7,9\right\}$, deci restul împărțirii la 5 poate fi 1 sau 2 sau3 sau 4. Prin urmare n nu se divide cu 5. Deci numărul $\underbrace{\overline{cc...cc}}_{p-m\ cifre}$ se împarte exact la n.	**2p**