

Barem la clasa a VI – a

1. Fie numerele $x = \frac{a}{b-2}$ și $y = \frac{3b-6}{a-3}$. Să se determine perechile (a,b) de numere naturale astfel încât x și y să fie numere naturale în același timp.

Dacă x și y sunt numere naturale, atunci și $x \cdot y = \frac{a}{b-2} \cdot \frac{3b-6}{a-3}$ este număr natural. 2p

Deci $x \cdot y = \frac{3a}{a-3} = \frac{3(a-3)+9}{a-3} = 3 + \frac{9}{a-3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a-3 \in \{1,3,9\} \Leftrightarrow a \in \{4,6,12\}$. 1p

Dacă $a = 4 \Rightarrow \frac{4}{b-2} \in \mathbb{N}, \frac{3b-6}{1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \in \{3,4,6\} \Rightarrow (a,b) \in \{(4,3), (4,4), (4,6)\}$ 1p

Dacă $a = 6 \Rightarrow \frac{6}{b-2} \in \mathbb{N}, \frac{3b-6}{3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \in \{3,4,5,8\}$ 1p

$\Rightarrow (a,b) \in \{(6,3), (6,4), (6,5), (6,8)\}$ 1p

Dacă $a = 12 \Rightarrow \frac{12}{b-2} \in \mathbb{N}, \frac{3b-6}{9} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \in \{5,8,14\}$

$\Rightarrow (a,b) \in \{(12,5), (12,8), (12,14)\}$ 1p

2. Să se determine cel mai mic numărul natural n , care împărțit la 5 dă restul 1, împărțit la 6 dă restul 3, împărțit la 7 dă restul 5 și împărțit la 8 dă restul 7.

Conform teoremei împărțirii cu rest avem:

$$\begin{cases} n = 5 \cdot c_1 + 1 \\ n = 6 \cdot c_2 + 3 \\ n = 7 \cdot c_3 + 5 \\ n = 8 \cdot c_4 + 7 \end{cases} \Leftrightarrow (2p) \begin{cases} n+9 = 5 \cdot c_1 + 10 \\ n+9 = 6 \cdot c_2 + 12 \\ n+9 = 7 \cdot c_3 + 14 \\ n+9 = 8 \cdot c_4 + 16 \end{cases}, \quad (2p) \text{ deci cel mai mic număr natural } n+9 \text{ care}$$

îndeplinește această condiție este $n+9 = [5;6;7;8;9] = 840 \Leftrightarrow n = 831$. (3p)

3. Fie șirul 1, 2, 4, 7, 11, de numere naturale.

a) Scrieți următorii doi termeni ai șirului.

b) Să se determine termenul de pe poziția 100.

a) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 11 \Rightarrow a_2 = a_1 + 1, a_3 = a_2 + 2, a_4 = a_3 + 3, a_5 = a_4 + 4$ (2p)

$\Rightarrow a_6 = a_5 + 5 = 11 + 5 = 16, a_7 = a_6 + 6 = 16 + 6 = 22$ (1p).

b) $a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 2, a_4 - a_3 = 3, a_5 - a_4 = 4, \dots, a_{100} - a_{99} = 99$ (1p). Sumând relațiile

obținem $a_{100} - a_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2}$ (2p) $\Rightarrow a_{100} = 1 + 99 \cdot 50 = 4951$ (1p).

4. Se dau punctele A, O, B coliniare în această ordine cu semidreptele $[OC$ și $[OD$ de aceeași parte a dreptei AB . Fie $[OX$ este bisectoarea unghiului AOD și $[OY$ este bisectoarea unghiului BOC . Să se determine măsura unghiului COD dacă:

- a) măsura unghiului XOY este de 135° ;
- b) măsura unghiului XOY este de 45° .

a) Fie $m\angle(AOX) = x = m\angle(XOD)$ și

$$m\angle(BOY) = b = m\angle(YOC) \quad (2p)$$

Din fig. 1 avem $a + m\angle(XOY) + b = 180^\circ \Rightarrow a + b = 45^\circ$ (1p)

Deci $m\angle(COD) = 135^\circ - (a + b) = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ (1p)

b) În fig. 2 avem:

$$m\angle(XOY) = 180^\circ - (a + b) \Rightarrow a + b = 135^\circ \quad (1p)$$

$$m\angle(COD) = m\angle(COX) + 45^\circ + m\angle(YOD) \quad (1p)$$

$$m\angle(COD) = b - 45^\circ + 45^\circ + a - 45^\circ =$$

$$m\angle(COD) = b + a - 45^\circ = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ \quad (1p)$$

