Barem la clasa a VI – a

1. Fie numerele $x=\dfrac{a}{b-2}$ şi $y=\dfrac{3b-6}{a-3}$. Să se determine perechile (a,b) de numere naturale astfel încât x şi y să fie numere naturale în acelaşi timp.

Dacă x şi y sunt numere naturale, atunci şi $x\cdot y=\dfrac{a}{b-2}\cdot\dfrac{3b-6}{a-3}$ este număr natural. 2p

Deci $x\cdot y=\dfrac{3a}{a-3}=\dfrac{3(a-3)+9}{a-3}=3+\dfrac{9}{a-3}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow a-3\in\{1,3,9\} \Leftrightarrow a\in\{4,6,12\}$. 1p

Dacă $a=4 \Rightarrow \dfrac{4}{b-2}\in\mathbb{N},\dfrac{3b-6}{1}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow b\in\{3,4,6\} \Rightarrow (a,b)\in\{(4,3),(4,4),(4,6)\}$ 1p

Dacă $a=6 \Rightarrow \dfrac{6}{b-2}\in\mathbb{N},\dfrac{3b-6}{3}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow b\in\{3,4,5,8\}$ 1p

$\Rightarrow (a,b)\in\{(6,3),(6,4),(6,5),(6,8)\}$ 1p

Dacă $a=12 \Rightarrow \dfrac{12}{b-2}\in\mathbb{N},\dfrac{3b-6}{9}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow b\in\{5,8,14\}$

$\Rightarrow (a,b)\in\{(12,5),(12,8),(12,14)\}$ 1p

2. Să se determine cel mai mic numărul natural n, care împărţit la 5 dă restul 1, împărţit la 6 dă restul 3, împărţit la 7 dă restul 5 şi împărţit la 8 dă restul 7.

Conform teoremei împărţirii cu rest avem:

$\begin{cases} n=5\cdot c_1+1 \\ n=6\cdot c_1+3 \\ n=7\cdot c_1+5 \\ n=8\cdot c_1+7 \end{cases} \Leftrightarrow (2p) \begin{cases} n+9=5\cdot c_1+10 \\ n+9=6\cdot c_1+12 \\ n+9=7\cdot c_1+14 \\ n+9=8\cdot c_1+16 \end{cases},$ (2p) deci cel mai mic număr natural $n+9$ care îndeplineşte această condiţie este $n+9=[5;6;7;8;9]=840 \Leftrightarrow n=831$. (3p)

3. Fie șirul 1, 2, 4, 7, 11, ……. de numere naturale.
a) Scrieți următorii doi termeni ai șirului.
b) Să se determine termenul de pe poziția 100.

a) $a_1=1,a_2=2,a_3=4,a_4=7,a_5=11 \Rightarrow a_2=a_1+1,a_3=a_2+2,a_4=a_3+3,a_5=a_4+4$ (2p)
$\Rightarrow$ $a_6=a_5+5=11+5=16,a_7=a_6+6=16+6=22$ (1p).
b) $a_2-a_1=1,a_3-a_2=2,a_4-a_3=3,a_5-a_4=4,.....,a_{100}-a_{99}=99$ (1p). Sumând relațiile obținem $a_{100}-a_1=1+2+3+......+99=\dfrac{99\cdot 100}{2}$ $(2p) \Rightarrow a_{100}=1+99\cdot 50=4951$ $(1p)$.

4. Se dau punctele *A*, *O*, *B* coliniare în această ordine cu semidreptele [*OC* şi [*OD* de aceiaşi parte a dreptei *AB*. Fie [*OX* este bisectoarea unghiului *AOD* şi [*OY* este bisectoarea unghiului *BOC*. Să se determine măsura unghiului *COD* dacă:

a) măsura unghiului *XOY* este de 135^0;

b) măsura unghiului *XOY* este de 45^0.

a) Fie $m\angle(AOX) = x = m\angle(XOD)$ şi

$m\angle(BOY) = b = m\angle(YOC)$ (2p)

Din fig. 1 avem $a + m\angle(XOY) + b = 180^0 \Rightarrow a + b = 45^0$ (1p)

Deci $m\angle(COD) = 135^0 - (a+b) = 135^0 - 45^0 = 90^0$ (1p)

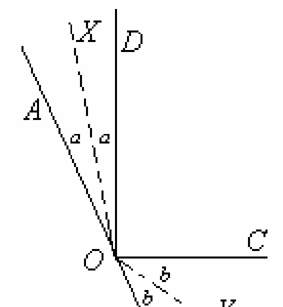

fig.1

b) În fig. 2 avem:

$m\angle(XOY) = 180^0 - (a+b) \Rightarrow a + b = 135^0$ (1p)

$m\angle(COD) = m\angle(COX) + 45^0 + m\angle(YOD)$ (1p)

$m\angle(COD) = b - 45^0 + 45^0 + a - 45^0 =$

$m\angle(COD) = b + a - 45^0 = 135^0 - 45^0 = 90^0$ (1p)

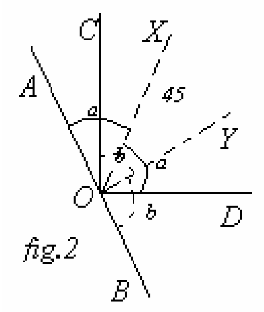

fig.2