

Barem la clasa a VII-a

1. Să se arate că $\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{99^3} < 0,25$

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right)$$

$$\frac{1}{4^3} < \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right)$$

$$\frac{1}{5^3} < \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) \Rightarrow \quad (4p)$$

.....

$$\frac{1}{99^3} < \frac{1}{97 \cdot 98 \cdot 99} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{97 \cdot 98} - \frac{1}{98 \cdot 99} \right)$$

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{99^3} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{98 \cdot 99} \right) \text{ deci} \quad (2p)$$

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{99^3} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{98 \cdot 99} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4850}{98 \cdot 99} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad (1p)$$

2. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$. Dacă P și Q sunt picioarele perpendiculelor din M pe AB , respectiv AC și E este mijlocul lui $[BC]$, arătați că $[EP] \equiv [EQ]$.

Fie T, S , mijloacele segmentelor $[BM]$ și $[MC]$, (2p)

de unde $[BT] \equiv [TP] \equiv [TM]$, $[CS] \equiv [SQ] \equiv [SM]$.

$[TE]$ este linie mijlocie în triunghiul BMC , de unde $TE \parallel MC$.

$[ES]$ este linie mijlocie în triunghiul BMC , de unde $ES \parallel MC$. (2p)

Deci $TESM$ este paralelogram, de unde

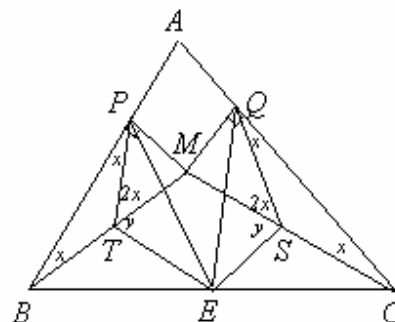
$[ES] \equiv [TM] \equiv [TP]$ și $[TE] \equiv [SM] \equiv [SQ]$ și $m\angle ETM = y = m\angle ESM$. (1p)

Dacă $m\angle ABM = x = m\angle ACM$ rezultă că

$m\angle PTM = 2x = m\angle QSM$, de unde

$m\angle PTE = 2x + y = m\angle QSE$. (1p)

Deci $\triangle PTE \equiv \triangle ESQ$ (LUL), de unde $[EP] \equiv [EQ]$. (1p)



3. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt{\frac{5x-2}{x+3}} \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt{\frac{5x-2}{x+3}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{5x-2}{x+3} \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{5x-2}{x+3} \text{ este pătrat perfect (2p)}$$

\Rightarrow

$$\frac{5(x+3)-17}{x+3} \in \mathbb{N} \Rightarrow 5 - \frac{17}{x+3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{17}{x+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+3) \in D_{17} \Rightarrow (x+3) \in \{-17, -1, 1, 17\}$$

$x \in \{-20, -4, -2, 14\}$ (3p). Verificarea conduce la $x = 14$ (2p).

4. Fie punctual O mijlocul ipotenuzei $[BC]$ a triunghiului dreptunghic ABC . Dacă D este un punct în interior triunghiului astfel încât $[BD]$ este bisectoarea unghiului ABO și $[AD]$ este bisectoarea unghiului CAO , iar $m\angle(ADB) = 75^\circ$, atunci $(BD) \equiv (CO)$.

În triunghiul ABC avem $(AO) \equiv (CO) \equiv (OB)$, de unde

$$m\angle(OBA) = m\angle(OAB) = 2x \text{ și } m\angle(OAC) = m\angle(OCA) = 2y.$$

Pentru că $[BD]$ bisectoare avem $m\angle(DBA) = m\angle(DBO) = x$ și $[AD]$

bisectoare avem $m\angle(CAD) = m\angle(DAO) = y$.

În triunghiul DAB și în triunghiul ABC avem:

$$\begin{cases} 3x + y = 105^\circ \\ 2x + 2y = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x + y = 105^\circ \\ x + y = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x + 45^\circ = 105^\circ \Leftrightarrow 2x = 60^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ \text{ și } y = 15^\circ. \text{ Atunci}$$

$m\angle(DAB) = 75^\circ = m\angle(ADB)$, de unde $(AD) \equiv (BD)$. Din triunghiul

ABC cu $m\angle(C) = 30^\circ$, avem $(AB) \equiv (CO) \equiv (OB) \equiv (BD)$.

