Barem la clasa a VII-a

1. Să se arate că $\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+....+\frac{1}{99^3}<0,25$

$$\frac{1}{3^3}<\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)$$

$$\frac{1}{4^3}<\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)$$

$$\frac{1}{5^3}<\frac{1}{3\cdot4\cdot5}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right) \Rightarrow \qquad (4p)$$

....

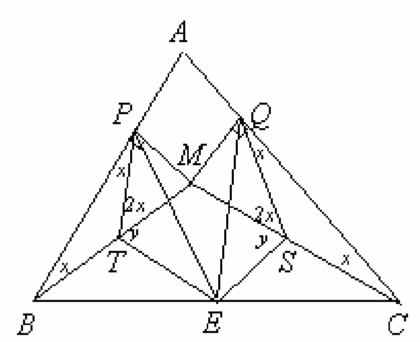
$$\frac{1}{99^3}<\frac{1}{97\cdot98\cdot99}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{97\cdot98}-\frac{1}{98\cdot99}\right)$$

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+....+\frac{1}{99^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{98\cdot99}\right) \text{ deci} \qquad (2p)$$

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+....+\frac{1}{99^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{98\cdot99}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4850}{98\cdot99}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \qquad (1p)$$

2. Fie *M* un punct în interiorul triunghiului *ABC* astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$. Dacă *P* şi *Q* sunt picioarelor perpendicularelor din *M* pe *AB*, respectiv *AC* şi *E* este mijlocul lui [*BC*], arătaţi că [*EP*] ≡ [*EQ*].

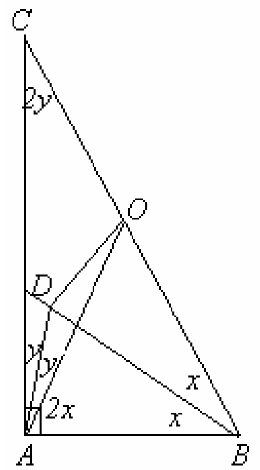
Fie *T*, *S*, mijloacele segmentelor [*BM*] şi [*MC*], (2p)
de unde [*BT*] ≡ [*TP*] ≡ [*TM*] , [*CS*] ≡ [*SQ*] ≡ [*SM*].
[*TE*] este linie mijlocie în triunghiul *BMC*, de unde $TE \parallel MC$.
[*ES*] este linie mijlocie în triunghiul *BMC*, de unde $ES \parallel MC$. (2p)
Deci *TESM* este paralelogram, de unde
[*ES*] ≡ [*TM*] ≡ [*TP*] şi [*TE*] ≡ [*SM*] ≡ [*SQ*] şi
$m\sphericalangle ETM = y = m\sphericalangle ESM$. (1p)
Dacă $m\sphericalangle ABM = x = m\sphericalangle ACM$ rezultă că
$m\sphericalangle PTM = 2x = m\sphericalangle QSM$, de unde
$m\sphericalangle PTE = 2x + y = m\sphericalangle QSE$. (1p)
Deci $\Delta PTE \equiv \Delta ESQ$ (LUL), de unde [*EP*] ≡ [*EQ*]. (1p)



3. Determinaţi $x\in\mathbb{Z}$ **astfel încât** $\sqrt{\frac{5x-2}{x+3}}\in\mathbb{Z}$ **.**

$\sqrt{\dfrac{5x-2}{x+3}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{5x-2}{x+3} \in \mathbb{N}$ **și** $\dfrac{5x-2}{x+3}$ este pătrat perfect (2p)
$\Rightarrow$
$\dfrac{5(x+3)-17}{x+3} \in \mathbb{N} \Rightarrow 5-\dfrac{17}{x+3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{17}{x+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+3) \in D_{17} \Rightarrow (x+3) \in \{-17,-1,1,17\}$
$x \in \{-20,-4,-2,14\}$ (3p). Verificarea conduce la **x =14** (2p).

4. Fie punctual *O* mijlocul ipotenuzei [*BC*] a triunghiului dreptunghic *ABC*. Dacă *D* este un punct în interior triunghiului astfel încât [*BD* este bisectoarea unghiului *ABO* şi [*AD* este bisectoarea unghiului *CAO*, iar $m\angle(ADB)=75^0$, atunci $(BD)\equiv(CO)$.



În triunghiul *ABC* avem $(AO)\equiv(CO)\equiv(OB)$, de unde $m\angle(OBA)=m\angle(OAB)=2x$ şi $m\angle(OAC)=m\angle(OCA)=2y$.
Pentru că [*BD* bisectoare avem $m\angle(DBA)=m\angle(DBO)=x$ şi [*AD* bisectoare avem $m\angle(CAD)=m\angle(DAO)=y$.
În triunghiul *DAB* și în triunghiul *ABC* avem:

$$\begin{cases}3x+y=105^0\\2x+2y=90^0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+x+y=105^0\\x+y=45^0\end{cases} \Rightarrow$$

$2x+45^0=105^0 \Leftrightarrow 2x=60^0 \Leftrightarrow x=30^0$ şi $y=15^0$. Atunci $m\angle(DAB)=75^0=m\angle(ADB)$, de unde $(AD)\equiv(BD)$. Din triunghiul *ABC* cu $m\angle(C)=30^0$, avem $(AB)\equiv(CO)\equiv(OB)\equiv(BD)$.