Barem la clasa a VIII – a

1. a) Arătaţi că, pentru orice numere reale x, y pozitive, nenule este adevărată inegalitatea: $\frac{2}{x+y}-\frac{1}{xy}\le 1$.

b) Demonstraţi că, pentru orice numere reale a, b, c pozitive, nenule pentru care $a+b+c=1$, este adevărată inegalitatea:
$\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a}+\frac{1+c}{a+b}\le\frac{1}{abc}$

a) Este cunoscut că $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\Rightarrow\frac{2}{x+y}\le\frac{1}{\sqrt{xy}}$, (2p)

deci înlocuind în relaţia dată avem $\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{xy}\le 1$. Dacă $\sqrt{xy}=z\Rightarrow z^2-z+1\ge 0\Leftrightarrow$

$\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\ \ (A)$. (2p)

b) $\frac{1+1-(b+c)}{b+c}+\frac{1+1-(a+c)}{c+a}+\frac{1+(a+b)}{a+b}\le\frac{a+b+c}{abc}\Rightarrow$ (1p)

$\frac{2}{b+c}-1+\frac{2}{c+a}-1+\frac{2}{a+b}-1\le\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$ (1p)

$\frac{2}{b+c}-1\le\frac{1}{bc}$ ….. (A) (1p)

2. a) Arătaţi că $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$

b) Să se arate că oricare ar fi n număr natural cu $n>1$, atunci numărul $a=n^5+n+1$ este număr compus.

a) $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}=$ (1p)

$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^4+3n^3+2n^2+1}{n^2(n+1)^2}}=$ (1p)

$=\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$; (1p)

$1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n^2+n+n+1-n}{n(n+1)}$. (1p)

b) $a=n^5+n+1=n^5+n^4+n^3+n^2+n+1-\left(n^4+n^3+n^2\right)=$ (1p)

$=n^3\left(n^2+n+1\right)+\left(n^2+n+1\right)-n^2\left(n^2+n+1\right)=$ (1p)

$=\left(n^2+n+1\right)\cdot\left(n^3-n^2+1\right)$. (1p)

3. Să se arate că: a) Dacă a,b,c > 0 arătați că $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}>\frac{15}{a+b+c}$.

b) $\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{2n+1}+\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^{2n+1}>4^{n+1}$

a) $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=\frac{(\sqrt{1})^2}{a}+\frac{(\sqrt{2})^2}{b}+\frac{(\sqrt{3})^2}{c}\underset{Andriescu}{\overset{Titu}{\geq}}\frac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{a+b+c}$ (2p), finalizare (1p).

b) Conform inegalităţii mediilor şi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$, $(\forall)\,a,b\in R_+$, $a\neq b$, (1p) avem:

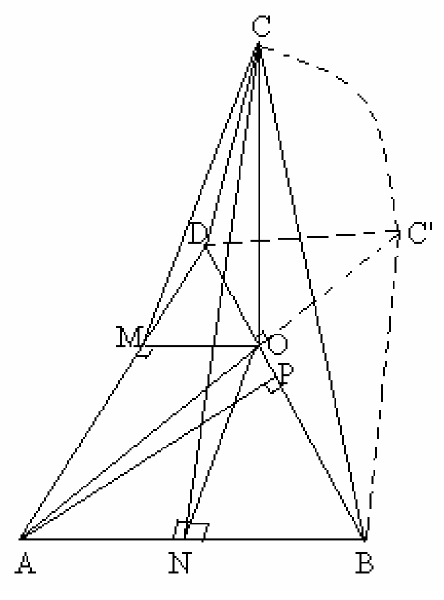
$$\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{2n+1}+\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^{2n+1}>2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{2n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^{2n+1}}\overset{(2p)}{=}$$

$$=2\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{2n+1}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^{2n+1}}=2\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+1\right)^{2n+1}}>2\sqrt{(2+2)^{2n+1}}=$$

$2\cdot 2^{2n+1}=4^{n+1}$ (1p)

4. Fie desenat pe o foaie de hârtie patrulaterul convex *ABCD* cu *AD* = *BC* = 2*x*, $DB=\left(\sqrt{3}+1\right)x$, $m\angle(ADB)=60^0$ şi $m\angle(DBC)=30^0$. Dacă se îndoaie foaia de hârtie după diagonala *BD* astfel încât planul *CBD* să fie perpendicular pe planul *ABD*, să se determine: a) tangenta unghiului plan diedru dintre planele *ADC* şi planul *ABD*; b) distanţa de la punctul *C* la dreapta *AB*.

Soluţie:
Fie *CO* $\perp$ *BD*, de unde în ΔBOC avem *OC* = *x*, *OB* = $x\sqrt{3}$. Dacă $AP\perp DB$ avem *DP* = *x*, de unde *O* = *P* şi *AO* = $x\sqrt{3}$.
(2p)



Întrucât (*CBD*) $\perp$ (*ABD*) avem $\left.\begin{array}{l} CO \perp (ABD) \\ OM \perp AD \\ OM, AD \subset (ABD) \end{array}\right\} \xrightarrow{T_{3p}} CM \perp AD$, (2p)

de unde $m\angle((ADC),(ABD)) = m\angle(CMO)$. Din ΔAOM avem $OM = \frac{\sqrt{3}x}{2}$. Din ΔCOM avem $tg\angle(CMO) = \frac{CO}{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (1p)

Întrucât $\left.\begin{array}{l} CO \perp (ABD) \\ ON \perp AB \\ ON, AB \subset (ABD) \end{array}\right\} \xrightarrow{T_{3p}} CN \perp AB$. (1p)

În triunghiul *AOB*, $AB = x\sqrt{6}$, $ON = \frac{\sqrt{6}x}{2}$. În triunghiul *CON*, $CN = \frac{\sqrt{10}x}{2}$.(1p)