

Barem la clasa a VIII – a

1. a) Arătați că, pentru orice numere reale x, y pozitive, nenule este adevărată inegalitatea:

$$\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} \leq 1.$$

b) Demonstrați că, pentru orice numere reale a, b, c pozitive, nenule pentru care $a+b+c=1$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{abc}$$

a) Este cunoscut că $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}$, (2p)

deci înlocuind în relația dată avem $\frac{1}{\sqrt{xy}} - \frac{1}{xy} \leq 1$. Dacă $\sqrt{xy} = z \Rightarrow z^2 - z + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad (A). \quad (2p)$$

b) $\frac{1+1-(b+c)}{b+c} + \frac{1+1-(a+c)}{c+a} + \frac{1+(a+b)}{a+b} \leq \frac{a+b+c}{abc} \Rightarrow$ (1p)

$$\frac{2}{b+c} - 1 + \frac{2}{c+a} - 1 + \frac{2}{a+b} - 1 \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \quad (1p)$$

$$\frac{2}{b+c} - 1 \leq \frac{1}{bc} \dots\dots (A) \quad (1p)$$

2. a) Arătați că $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) Să se arate că oricare ar fi n număr natural cu $n > 1$, atunci numărul $a = n^5 + n + 1$ este număr compus.

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}} =$ (1p)

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 1}{n^2(n+1)^2}} =$$
 (1p)

$$= \sqrt{\frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2}} = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}; \quad (1p)$$

$$1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n^2 + n + n + 1 - n}{n(n+1)}. \quad (1p)$$

$$b) a = n^5 + n + 1 = n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 - (n^4 + n^3 + n^2) = \quad (1p)$$

$$= n^3(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) - n^2(n^2 + n + 1) = \quad (1p)$$

$$= (n^2 + n + 1) \cdot (n^3 - n^2 + 1). \quad (1p)$$

3. Să se arate că: a) Dacă $a, b, c > 0$ arătați că $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} > \frac{15}{a+b+c}$.

$$b) \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{2n+1} + \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right)^{2n+1} > 4^{n+1}$$

$$a) \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{(\sqrt{1})^2}{a} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b} + \frac{(\sqrt{3})^2}{c} \stackrel{\text{Titu}}{\geq} \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{a+b+c} \quad (2p), \text{ finalizare } (1p).$$

b) Conform inegalității mediilor și $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}_+$, $a \neq b$, (1p) avem:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{2n+1} + \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right)^{2n+1} > 2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{2n+1} \cdot \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right)^{2n+1}} \stackrel{(2p)}{=} \\ & = 2 \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{2n+1} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right)^{2n+1}} = 2 \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + 1 \right)^{2n+1}} > 2 \sqrt{(2+2)^{2n+1}} = \\ & 2 \cdot 2^{2n+1} = 4^{n+1} \quad (1p) \end{aligned}$$

4. Fie desenat pe o foaie de hârtie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AD = BC = 2x$,

$DB = (\sqrt{3} + 1)x$, $m\angle(ADB) = 60^\circ$ și $m\angle(DBC) = 30^\circ$. Dacă se îndoaie foaia de hârtie

după diagonala BD astfel încât planul CBD să fie perpendicular pe planul ABD , să se

determine: a) tangenta unghiului plan diedru dintre

planele ADC și planul ABD ; b) distanța de la punctul

C la dreapta AB .

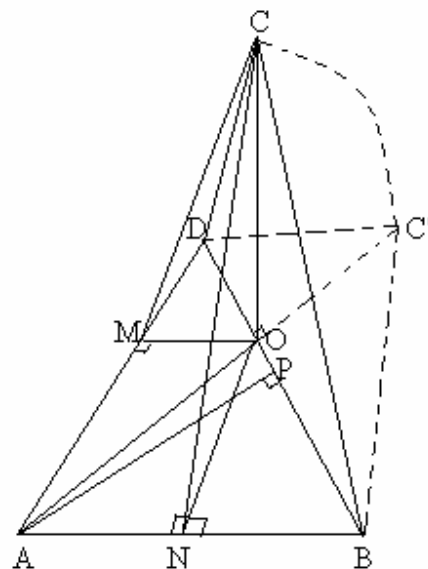
Soluție:

Fie $CO \perp BD$, de unde în $\triangle BOC$ avem $OC = x$,

$OB = x\sqrt{3}$. Dacă $AP \perp DB$ avem $DP = x$,

de unde $O = P$ și $AO = x\sqrt{3}$.

(2p)



$$\hat{\text{Întrucât}} \left. \begin{array}{l} CO \perp (ABD) \\ (CBD) \perp (ABD) \text{ avem } OM \perp AD \\ OM, AD \subset (ABD) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_{3p}} CM \perp AD, \quad (2p)$$

de unde $m\angle((ADC), (ABD)) = m\angle(CMO)$. Din ΔAOM avem $OM = \frac{\sqrt{3}x}{2}$. Din ΔCOM

$$\text{avem } \operatorname{tg} \angle(CMO) = \frac{CO}{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad (1p)$$

$$\hat{\text{Întrucât}} \left. \begin{array}{l} CO \perp (ABD) \\ ON \perp AB \\ ON, AB \subset (ABD) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_{3p}} CN \perp AB. \quad (1p)$$

În triunghiul AOB , $AB = x\sqrt{6}$, $ON = \frac{\sqrt{6}x}{2}$. În triunghiul CON , $CN = \frac{\sqrt{10}x}{2}$. (1p)