Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

11 februarie 2012

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$a=11^{100}\cdot(1+11+121)+11^{103}\cdot(1+11+121)+...+11^{196}\cdot(1+11+121)+11^{199}=$ $133\cdot(11^{100}+11^{103}+...+11^{196})+11^{199}.$	3p
	Deci restul împărțirii numărului a la 133 este restul împărțirii numărului 11^{199} la 133.	2p
	$11^{199}=11^{198}\cdot 11=(11^3)^{66}\cdot 11=1331^{66}\cdot 11=(1330+1)^{66}\cdot 11=M_{133}+11\Rightarrow$ restul=11	2p
2.	$a^3+b^3\geq a^2\cdot b+a\cdot b^2\Leftrightarrow(a+b)\cdot(a-b)^2\geq 0(A),(\forall)a,b>0$	4p
	$abc=1\Rightarrow c=\frac{1}{ab}.$ Inegalitatea de demonstrat devine $2\cdot\left(\frac{a}{b}+a\cdot b^2+\frac{1}{a^2\cdot b}\right)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab+a+b+\frac{1}{ab};$ Înmulțind cu $a^2\cdot b$, obținem: $2\cdot(a^3+a^3\cdot b^3+1)\geq ab+a^2+a^3b^2+a^3b+a^2b^2+a\Leftrightarrow$ $(a^3-a^2-a+1)+(a^3b^3-ab-a^2b^2+1)+a^3\cdot(b^3-b^2-b+1)\geq 0(A)$ conform punctului a).	3p
3.	$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leq\sqrt{x\cdot y}\Leftrightarrow\frac{2xy}{x+y}\leq\sqrt{xy}\Leftrightarrow 4x^2y^2\leq xy\cdot(x+y)^2\Leftrightarrow(x+y)^2\geq 4xy\Leftrightarrow$ $(x-y)^2\geq 0(A),(\forall x,y>0)$	3p

	figura	**1p**
	$MN \parallel EF \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle AEF \Rightarrow \frac{MN}{EF}=\frac{AM}{AE}\, sau\, \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AE}(1).$ Din MN $\parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AB}=\frac{EM}{AE}(2)$	**1p**
	Adunand $(1) cu (2) \Rightarrow \frac{MN}{BC}+\frac{MN}{AB}=\frac{AM}{AE}+\frac{EM}{AE} \Rightarrow MN\cdot\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AB}\right)=$ $2\cdot MN=\frac{2}{\frac{1}{BC}+\frac{1}{AB}} \overset{(a)}{\Rightarrow} 2\cdot MN<\sqrt{AB\cdot BC}.$	**2p**
4.	$\left.\begin{array}{l} DO\perp(ABC) \\ \text{Construim } OE\perp BC \\ BC\subset(ABC) \end{array}\right\} \overset{T.3.\perp}{\Rightarrow} DE\perp BC$; $[MN]$ linie mijlocie în triunghiul $\triangle DBC \Rightarrow MN \parallel BC$ $MN\cap DE=\{F\}$; În triunghiul $\triangle DOE$ ducem $FO' \parallel OE, O'\in[DO]$; $\left.\begin{array}{l} O'F \parallel OE \\ OE\perp BC \\ OE\perp DO \\ MN \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O'F\perp MN \\ O'F\perp DO \end{array}\right\} \Rightarrow O'F=\frac{OE}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{12}$ distanța dintre dreptele MN şi DO.	**3p**

	$[AE] \equiv [DE]$; fie $EP \perp AD, P \in AD$; $\left.\begin{array}{l} BC \perp AE \\ BC \perp DE \\ AE \cap DE = \{E\} \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (AED)$ $\left.\begin{array}{l} BC \perp (AED) \\ EP \subset (AED) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp EP$ Asadar, $d(AD, BC)$ $= EP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.	**2p**
	$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel (ABC)$; $\left.\begin{array}{l} O'F \parallel (ABC) \\ MN \parallel (ABC) \\ O'F \cap MN = \{F\} \end{array}\right\} \Rightarrow (O'MN) \parallel (ABC) \Rightarrow d(MN, AB) =$ $d((ABC);(O'MN)) = OO' = \frac{VO}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$	**2p**