Concursul județean de matematică “Dan Hulubei”, Galati

28 aprilie 2012

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	**a)** $S=\frac{\lg 2}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\lg\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}}+\ldots+\frac{1}{99}\cdot\frac{\lg\left(1+\frac{1}{99}\right)}{\frac{1}{99}}=$	**1p**
	$S=\lg\frac{2}{1}+\lg\frac{3}{2}+\lg\frac{4}{3}+\ldots+\lg\frac{99}{98}+\lg\frac{100}{99}=$	**1p**
	$\lg\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{98}\frac{100}{99}\right)=\lg\frac{100}{1}=2.$	**1p**
	b) Condiții de existență: $\begin{cases} 9x-3>0 \\ x-\frac{1}{3}>0 \\ \log_3(9x-3)\geq 0=\log_3 1 \\ \log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 0=\log_3 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x\geq\frac{4}{9} \\ x\geq\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x\geq\frac{4}{3}.$	**1p**
	$\left[\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]^2-\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)-2=0.$ cu substituția $y=\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)$	**1p**
	Ecuația devine $y^2-y-2=0\Rightarrow y_1=2$ și $y_2=-1.$	**1p**
	$y_1=2\Rightarrow x-\frac{1}{3}=3^2\Rightarrow x_1=\frac{28}{3}\in[\frac{4}{3},\infty)$ iar pentru $y_2=-1\Rightarrow x-\frac{1}{3}=3^{-1}\Rightarrow x_2=\frac{2}{3}\notin[\frac{4}{3},\infty).$	**1p**

2.	**a**)Ecuația se mai scrie $\left(2^{x}\right)^{2}+\left(3^{x}\right)^{2}=2\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}\Leftrightarrow\left(2^{x}-3^{x}\right)^{2}=0$. Apoi rezultă că $2^{x}=3^{x}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1\Leftrightarrow x=0.$	**1p** **1p**
2.	**b)1.)** α rădăcină a ecuației $x^{2}+x+1=0\Rightarrow\alpha^{2}+\alpha+1=0$ $S=\alpha\cdot\left(1+\alpha+\alpha^{2}\right)+\alpha^{4}\cdot\left(1+\alpha+\alpha^{2}\right)+...+\alpha^{31}\cdot\left(1+\alpha+\alpha^{2}\right)=0$	**1p** **1p**
	2.) Din $\alpha^{2}+\alpha+1=0\Rightarrow 1+\alpha=-\alpha^{2}$ şi $1+\alpha^{2}=-\alpha.$ Din $1+\alpha=-\alpha^{2}\mid\cdot\alpha\Rightarrow\alpha^{3}=-\alpha^{2}-\alpha\Rightarrow\alpha^{3}=1.$	**1p**
	$T=\left[(-\alpha)\cdot\left(-\alpha^{2}\right)\cdot(1+1)\right]\cdot\left[(-\alpha)\cdot\left(-\alpha^{2}\right)\cdot(1+1)\right]\cdot...\left[(-\alpha)\cdot\left(-\alpha^{2}\right)\cdot(1+1)\right]=$ $2\cdot 2\cdot...\cdot 2=2^{11}=2048$.	**1p** **1p**
3.	**a**)Din $z=a+bi, a,b\in\mathbb{Z},\lvert z\rvert=\sqrt{a^{2}+b^{2}}$.	**1p**
	Obținem egalitatea $a^{2}+b^{2}=2$ şi $a^{2},b^{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow\begin{cases}a^{2}=1\\ b^{2}=1\end{cases}$. Rezultă $\begin{cases}a=\pm 1\\ b=\pm 1\end{cases}$. Se obține mulțimea $A=\{(-1;-1),(-1;+1)(+1;-1)(+1;+1)\}$.	**1p** **1p**
	b) Fie $M_1(-1;-1), M_2(+1;-1), M_3(+1;+1), M_4(-1;+1)$ punctele din plan corespunzătoare elementelor mulțimii A. Avem $\left.\begin{array}{l}M_1 \text{ şi } M_4 \text{ au aceeaşi abscisă}\\ M_2 \text{ şi } M_3 \text{ au aceeaşi abscisă}\end{array}\right\}\Rightarrow M_1M_4 \parallel Oy \parallel M_2M_3 \quad (1)$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}M_1 \text{ şi } M_2 \text{ au aceeaşi ordonată}\\ M_3 \text{ şi } M_4 \text{ au aceeaşi ordonată}\end{array}\right\}\Rightarrow M_1M_2 \parallel Ox \parallel M_3M_4 \quad (2)$.	**1p**
	Din $(1),(2)\Rightarrow M_1M_2M_3M_4$ este dreptunghi(3). Din (3) si calculând $M_1M_3=M_2M_4=\sqrt{2^2+0^2}\Rightarrow M_1M_2M_3M_4$ este pătrat de latură 2.	**1p** **1p**