Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

11 februarie 2012

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$\begin{cases} x>0 \\ \ln x \in [-1,1] \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] = D.$	2p
	$2^{\arccos(\ln x)} + 0,5^{-2arcctgx} = \sqrt{2^{\pi+2}} \Leftrightarrow 2^{\arccos(\ln x)} + 4^{arcctgx} = 2\cdot\sqrt{2^{\pi}}.$	1p
	$x=1 \Rightarrow 2^{\arccos 0} + 4^{arcctg1} = 2^{\frac{\pi}{2}} + 4^{\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{\pi}{2}} + 2^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\sqrt{2^{\pi}} \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ este solutie	1p
	$x \in (1,e] \Rightarrow \ln x \in (0,1] \Rightarrow \arccos(\ln x) < \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2^{\arccos(\ln x)} < 2^{\frac{\pi}{2}} \quad (1)$ $x>1 \Rightarrow arcctgx < arcctg1 \Rightarrow 4^{arcctg(x)} < 4^{\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{\pi}{2}} \quad (2)$ $din(1)si(2) \Rightarrow 2^{\arccos(\ln x)} + 4^{arcctg(x)} < 2\cdot\sqrt{2^{\pi}} \Rightarrow$ in $(1,e]$ ecuatia nu are solutii.	1p
	$x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right) \Rightarrow 2^{\arccos(\ln x)} + 4^{arcctg(x)} > 2\cdot\sqrt{2^{\pi}} \Rightarrow$ in $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$ ecuatia nu are solutii. $x=1$ este solutie unica.	2p
2.	Metoda inducției matematice. I) $n=4 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ (A)	3p
	II) $P(n) \Rightarrow P(n+1), (\forall) n \geq 4$. Presupunem că $(\exists) a_1, a_2, ..., a_n$, numere pare distincte cu $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$, unde $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$ și $n \geq 4$.	1p

	Să demonstrăm că P(n+1) (A) $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\ldots+\frac{1}{2a_n}$ cu $2<2a_1<2a_2<\ldots<2a_n$ numere pare distincte. Rezultă că $P(n+1)(A)$; $Din\ I$ si $II\Rightarrow \mathrm{P}(n)(A)$	**3p**
3.	Din relația 1) avem $2p=\frac{4}{r\cdot R}\Rightarrow p\cdot r\cdot R=2\Rightarrow R\cdot S=2\Rightarrow 4\cdot R\cdot S=8$ $\Rightarrow a\cdot b\cdot c=8$.	**3p**
	Din 2) şi inegalitatea mediilor, obținem: $6=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}}=3\sqrt[3]{abc}=6$.	**2p**
	în inegalitatea mediilor avem egalitate pentru $a=b=c$.Aceasta arată că triunghiul ABC este echilateral,de unde rezultă că $R=2\cdot r$.	**2p**
4	$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\lvert\overrightarrow{OB}\rvert\cos 2C+\lvert\overrightarrow{OB}\rvert\lvert\overrightarrow{OC}\rvert\cos 2A+$ $\lvert\overrightarrow{OC}\rvert\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\cos 2B=$ $R^2\left(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\right)=-54\Rightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-\frac{3}{2}$.	**3p**
	$2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1=-\frac{3}{2}$. $-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C=-\frac{1}{4}\Rightarrow \cos C\left(\cos(A-B)-\cos C\right)=-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \cos C\cdot 2\sin\frac{\pi-2B}{2}\sin\frac{2A-\pi}{2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow \cos C\cos B\cos A=\frac{1}{8}$ $\Rightarrow \cos A\cos B\cos C=\frac{1}{8}$	**2p**
	$\Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral-demonstrație imediată.	**2p**