OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2012
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a X-a

1. Să se rezolve ecuaţia $\left(\sqrt{2}\right)^{1+|x|}+2^{\sqrt{1-x^2}}=3$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie.
Din condiţiile de existenţă deducem $x\in[-1,1]$. Atunci

$$\left(\sqrt{2}\right)^{1+|x|}+2^{\sqrt{1-x^2}}=2\cdot 2^{\frac{|x|-1}{2}}+2^{\sqrt{1-x^2}}\ge 3\sqrt[3]{2^{|x|-1+\sqrt{1-x^2}}}\ge 3.$$

Ultima inegalitate are loc deoarece

$$|x|-1+\sqrt{1-x^2}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{1-|x|^2}\ge 1-|x|\Leftrightarrow 2|x|\left(1-|x|\right)\ge 0\Leftrightarrow |x|\in[0,1]\Leftrightarrow x\in[-1,1].$$

Egalităţile sunt satisfăcute simultan pentru $|x|=1$. În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $x\in\{-1,1\}$.

Barem.

Condiţii de existenţă $x\in[-1,1]$	2 p
Obţine $\left(\sqrt{2}\right)^{1+|x|}+2^{\sqrt{1-x^2}}\ge 3\sqrt[3]{2^{|x|-1+\sqrt{1-x^2}}}$	2 p
Obţine $3\sqrt[3]{2^{|x|-1+\sqrt{1-x^2}}}\ge 3, \forall x\in[-1,1]$	2 p
Finalizare $x\in\{-1,1\}$	1 p

2. Demonstraţi că $\sqrt{\log_2 12+\log_9 12+\log_8 12}\ge\sqrt{\log_2 6}+\sqrt{\log_9\frac{4}{3}}+\sqrt{\log_8\frac{3}{2}}$.

Anca Andrei, Suceava

Soluţia 1. *(autor)*
Observăm că $\dfrac{1}{\log_2 12}+\dfrac{1}{\log_9 12}+\dfrac{1}{\log_8 12}=2\Leftrightarrow$

$$\log_9 12\cdot\log_8 12+\log_2 12\cdot\log_8 12+\log_2 12\cdot\log_9 12=2\log_2 12\cdot\log_9 12\cdot\log_8 12. \qquad (*)$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie în forma echivalentă

$$\sqrt{\log_2 12+\log_9 12+\log_8 12}\ge\sqrt{\log_2 12-1}+\sqrt{\log_9 12-1}+\sqrt{\log_8 12-1}. \qquad (**)$$

Notăm $\log_2 3=a$, $a\in(1,2)\Rightarrow$ $\log_2 12=2+a$, $\log_9 12=\frac{1}{2}+\frac{1}{a}$, $\log_8 12=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}a$.

Inegalitatea $(**)$ se scrie în forma echivalentă $\sqrt{\frac{19}{6}+\frac{4}{3}a+\frac{1}{a}}\ge\sqrt{1+a}+\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}(a-1)}$. $\quad(***)$

Ridicând la pătrat şi notând $\sqrt{1+a}=u$, $\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}=v$, $\sqrt{\frac{1}{3}(a-1)}=w$ rămâne de arătat că $uv+uw+vw\le\frac{3}{2}$.

Dar $u^2=1+a$, $v^2=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$, $w^2=\frac{1}{3}(a-1)\Rightarrow\log_2 12=1+u^2$, $\log_9 12=1+v^2$, $\log_8 12=1+w^2$ şi înlocuind în

$(*)$ obţinem relaţia $u^2v^2+v^2w^2+u^2w^2+2u^2v^2w^2=1$ $\quad(****)$. Observăm că $uw=\sqrt{\frac{a^2-1}{3}}<1$.

Notăm $A=uv+vw$, $B=uv-vw$, $C=uw$ şi arătăm că $A+C\le\frac{3}{2}$. Relaţia $(****)$ se rescrie în forma

$$\frac{A^2+B^2}{2}+C^2+\frac{\left(A^2-B^2\right)C}{2}=1 \Rightarrow A^2(1+C)=2\left(1-C^2\right)+B^2(C-1)<2\left(1-C^2\right) \Rightarrow A^2<2(1+C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A<\sqrt{2(1+C)} \Rightarrow A+C<\sqrt{2(1-C)}+C=\frac{3}{2}+C-\frac{3}{2}+\sqrt{2(1-C)}=\frac{3}{2}-\left(\sqrt{1-C}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}.$$

Soluția 2. *(80% calcul)*

Notăm $x=\log_2 6,\ y=\log_9 \frac{4}{3},\ z=\log_8 \frac{3}{2}$. Atunci $\log_2 12=x+1, \log_9 12=y+1, \log_8 12=z+1$, iar inegalitatea ce trebuie demonstrată devine

$$\sqrt{x+y+z+3} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \leq \frac{3}{2}.$$

Se arată că $x<\frac{13}{5}$ ($\Leftrightarrow 3^5<2^8 \Leftrightarrow 243<256$), $y<\frac{1}{7}$ ($\Leftrightarrow 2^{14}<3^9 \Leftrightarrow 16384<19683$) şi $z<\frac{1}{5}$ ($\Leftrightarrow 3^5<2^8$).

Deducem că $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}<\sqrt{\frac{13}{35}}+\sqrt{\frac{1}{35}}+\sqrt{\frac{13}{25}}$. Dacă arătam că $\sqrt{\frac{13}{35}}+\sqrt{\frac{1}{35}}+\sqrt{\frac{13}{25}}<\frac{3}{2}$ rezultă cerinţa.

Dar ultima inegalitate este echivalentă cu $2\sqrt{65}+2\sqrt{91}<15\sqrt{7}-2\sqrt{5}$. Prin ridicare la pătrat şi reducerea termenilor asemenea ajungem la inegalitatea echivalentă $164\sqrt{35}<971 \Leftrightarrow 941360<942841 \quad (A)$.

Barem.

Notează $x=\log_2 6,\ y=\log_9 \frac{4}{3},\ z=\log_8 \frac{3}{2}$	1 p
Inegalitatea este echivalentă cu $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \leq \frac{3}{2}$	2 p
Arată că $x<\frac{13}{5},\ y<\frac{1}{7},\ z<\frac{1}{5}$	3 p
Arătă că $\sqrt{\frac{13}{35}}+\sqrt{\frac{1}{35}}+\sqrt{\frac{13}{25}}<\frac{3}{2}$ şi finalizare	1 p

3. Fie a,b,c trei numere complexe distincte, de acelaşi modul *r*. Ştiind că numerele $a-bc$, $b-ac$, $c-ab$ sunt reale, să se determine *r*.

26555, G.M. 1/2012

Soluție.

Evident $r\neq 0$ (altfel $a=b=c=0$). Scriem cele trei numere sub formă trigonometrică $a=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $b=r(\cos\beta+i\sin\beta)$ şi $c=r(\cos\gamma+i\sin\gamma)$, cu $\alpha,\beta,\gamma\in[0,2\pi)$. Ţinând cont de operaţiile cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică şi că $a-bc, b-ac, c-ab\in\mathbb{R}$ deducem $\sin\alpha=r\sin(\beta+\gamma)$, $\sin\beta=r\sin(\alpha+\gamma)$ şi $\sin\gamma=r\sin(\alpha+\beta)$. Din primele două relaţii, prin înmulţirea lor, obţinem că $\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)=\sin\beta\sin(\beta+\gamma)$. Atunci $\cos(2\alpha+\gamma)=\cos(2\beta+\gamma)$, de unde rezultă că $\alpha=\beta+k\pi$ (care conduce la $a=b$ sau $a=-b$) sau $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$. În concluzie, din primele două relaţii deducem că $a=-b$ sau $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$. În mod analog găsim $a=-c$ sau $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$, respectiv $b=-c$ sau $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$. Dacă $\alpha+\beta+\gamma\neq k\pi$ atunci sunt îndeplinite condiţiile $a=-b$, $a=-c$, $b=-c$ care conduc la contradicţia $a=b=c=0$. În concluzie $\alpha+\beta+\gamma=k\pi, k\in\{1,2,3,4,5\}$.

Pentru *k* par obţinem contradicţie. Într-adevăr, relaţia $\alpha+\beta+\gamma=2h\pi$ conduce la $\sin\alpha=-r\sin\alpha$ şi analoagele. Dar $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$ nu pot fi simultan nule (în caz contrar, ar rezulta că $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi cum $|a|=|b|=|c|$ am obţine că două din numerele a,b,c sunt egale), de unde $r=-1$, fals.

Pentru *k* impar obţinem $\alpha+\beta+\gamma=(2h+1)\pi$, care conduce la $\sin\alpha=r\sin\alpha$ şi analoagele. Cum $\sin\alpha$, $\sin\beta,\sin\gamma$ nu pot fi simultan nule, rezultă $r=1$. În plus, $\alpha+\beta+\gamma=k\pi, k\in\{1,3,5\}$.

Un exemplu de astfel de numere îl reprezintă $a=-1, b=i, c=-i$.

Barem.

Scrie numerele sub formă trigonometrică	1 p
Deduce că $\sin\alpha = r\sin(\beta+\gamma)$ şi analoagele	2 p
Obţine $\alpha+\beta+\gamma = k\pi, k\in\{1,2,3,4,5\}$	2 p
Obţine contradicţie în cazul k par	1 p
Finalizare $r=1$	1 p

1. Fie M o mulţime formată din 2012 puncte din plan şi $f: M \to \{-1,1\}$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice dreaptă d care trece prin cel puţin două puncte din mulţimea M este îndeplinită egalitatea $\sum_{X\in d\cap M} f(X) = 0$. Să se arate că punctele mulţimii M sunt coliniare.

Marius Marchitan, Suceava

Soluţie.

Fie $S = \sum_{X\in M} f(X)$ şi $A\in M$ un punct arbitrar. Notăm cu $D(A)$ mulţimea dreptelor din plan care trec prin A şi prin cel puţin încă un punct din M şi cu $n(A)$ cardinalul mulţimii $D(A)$ (observăm că $1\le n(A)\le 2011$). Conform ipotezei, $\sum_{X\in d\cap M} f(X) = 0$ pentru orice dreaptă $d\in D(A)$. Atunci $\sum_{d\in D(A)}\sum_{X\in d\cap M} f(X) = 0$. Cum fiecare punct din M cu excepţia lui A se află situat pe exact o dreaptă din $D(A)$, iar A se află pe toate cele $n(A)$ drepte din $D(A)$, deducem că $\sum_{d\in D(A)}\sum_{X\in d\cap M} f(X) = (n(A)-1)f(A)+S$. În concluzie,

$$(n(A)-1)f(A)+S = 0, \forall A\in M.$$

Presupunem acum că punctele lui M nu sunt coliniare. Deducem că $n(A)>1, \forall A\in M$. Avem următoarele situaţii: 1) $S>0$, caz în care $f(A)<0, \forall A\in M$, deci $S<0$, contradicţie; 2) $S<0$, deci $f(A)>0, \forall A\in M$, de unde $S>0$, contradicţie; 3) $S=0$, implică $f(A)=0, \forall A\in M$, în contradicţie cu $f(A)\in\{-1,1\}, \forall A\in M$.
Cum oricare din situaţii conduce la contradicţie, deducem că presupunerea e falsă, deci punctele lui M sunt coliniare.

Barem.

Obţine $\sum_{d\in D(A)}\sum_{X\in d\cap M} f(X) = 0$	2 p
Obţine $\sum_{d\in D(A)}\sum_{X\in d\cap M} f(X) = (n(A)-1)f(A)+S$	2 p
Deduce $(n(A)-1)f(A)+S = 0, \forall A\in M$	1 p
Finalizare	2 p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.