OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2012

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XI-a

1. Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $AA^T = A^T A + A^*$, unde A^T şi A^* reprezintă transpusa, respectiv adjuncta matricei A. Să se arate că:

a) (2p) $\det A \neq 0 \Rightarrow \det\left(AA^T - A^T A\right) > 0.$

b) (5p) $\det A = 0 \Leftrightarrow Tr\left(A^3\right) = Tr^3(A),$ unde $Tr(A)$ reprezintă urma matricei A.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. a) $AA^* = (\det A) I_3 \Rightarrow \det A \cdot \det A^* = (\det A)^3 \Rightarrow \det A^* = (\det A)^2 > 0 \Rightarrow \det\left(AA^T - A^T A\right) > 0$.

b) $AA^T = A^T A + A^* \Rightarrow Tr\left(A^*\right) = 0.(1)$ Din relaţia Cayley-Hamilton: $A^3 - (TrA)A^2 - (\det A) I_3 = O_3$ rezultă, trecând la urmă, $Tr\left(A^3\right) - (TrA)Tr\left(A^2\right) - 3(\det A) = 0.(2)$. Se ştie că $Tr\left(A^*\right) = \dfrac{Tr^2(A) - Tr\left(A^2\right)}{2}$.

Folosind (1) rezultă $Tr\left(A^2\right) = Tr^2(A).(3)$ Din relaţiile (2) şi (3) obţinem $Tr\left(A^3\right) - (TrA)^3 = 3\det A$, de unde concluzia.

Barem.

a) Demonstrarea cerinţei…………………………………………………………………..	2 p
b) $AA^T = A^T A + A^* \Rightarrow Tr\left(A^*\right) = 0.$……………………………………………………	1 p
relaţia Cayley-Hamilton $A^3 - (TrA)A^2 - (\det A) I_3 = O_3$ ………………………………………. $Tr\left(A^3\right) - (TrA)Tr\left(A^2\right) - 3(\det A) = 0.$……………………………………………….	1 p 1 p
$Tr\left(A^2\right) = Tr^2(A).$……………………………………………………………………….. Finalizare …………………………………………………………………………………	1 p 1 p

2. Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, care satisfac $A^3 = (AB)^3 = I_2$.

a) (2p) Să se demonstreze că $(BA)^3 = I_2$.

b) (5p) Să se arate că dacă, în plus, $A, B \neq I_2$ şi $AB = BA$, atunci $B^3 = I_2$ şi $(B - A)\left(B - A^2\right) = O_2$.

Angela Ţigăeru, Suceava

Soluţie. a) Înmulţind relaţia $(AB)^3 = I_2$ la stânga cu A^2 şi la dreapta cu A, obţinem $(BA)^3 = I_2$.

b) $AB = BA, A^3 = (AB)^3 = I_2 \Rightarrow B^3 = I_2 \Rightarrow \det B = 1$. Înmulţind ecuaţia caracteristică $B^2 - tr(B)B + (\det B)I_2 = O_2$ a matricei B cu B şi ţinând cont că $B^3 = I_2$, obţinem $-tr(B)B^2 + B + I_2 = O_2$. Scăzând ultimele două relaţii obţinem $(1 + tr(B))\left(B^2 - B\right) = O_2$. Dacă $1 + tr(B) \neq 0$, atunci $B^2 = B \Rightarrow B^3 = B^2 = I_2$, absurd. Deci $1 + tr(B) = 0 \Rightarrow B^2 + B + I_2 = O_2$. Un raţionament analog conduce la

$A^2 + A + I_2 = O_2$, care împreună cu relaţia anterioară ne dau $(B-A)(B+A+I_2)=O_2 \Rightarrow (B-A)(B-A^2)=O_2$.

Barem.

a) Demonstrarea cerinţei……………………………………………………………………..	2 p
b) Deduce $AB=BA, A^3=(AB)^3=I_2 \Rightarrow B^3=I_2$ ……………………………………………..	1 p
Scrie ecuaţia caracteristică $B^2 - tr(B)B + (\det B)I_2 = O_2$ …………………………………….	1 p
Obţine $(1+tr(B))(B^2-B)=O_2$. …………………………………………………………	1 p
Deduce $B^2+B+I_2=O_2$. …………………………………………………………………..	1 p
Finalizare $(B-A)(B+A+I_2)=O_2 \Rightarrow (B-A)(B-A^2)=O_2$ ……………………………………	1 p

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = 0$, care verifică recurenţa:
$n \cdot e^{3x_n} + e^{2x_n} + e^{x_n} - n + 1 = 0, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$

a) (3p) Arătaţi că $x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) (1p) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) (3p) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_{n+1}}{x_n}$.

Aurica Lucaci, Gura Humorului

Soluţie.

a) $n\left(e^{3x_n}-1\right)+e^{2x_n}+e^{x_n}+1=0 \Rightarrow \left(e^{2x_n}+e^{x_n}+1\right)\left(ne^{x_n}-n+1\right)=0$, dar

$e^{2x_n}+e^{x_n}+1>1, \forall n \in N \Rightarrow n\left(e^{x_n}-1\right)=-1 \Rightarrow e^{x_n}-1=-\dfrac{1}{n} \Rightarrow e^{x_n}=\dfrac{n-1}{n} \Rightarrow x_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, dar

$1-\dfrac{1}{n}<1, \forall n \geq 2 \Rightarrow x_n<0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]}{\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\left(\ln\dfrac{n}{n+1}\right)}{\ln\dfrac{n}{n+1}}\cdot\dfrac{\ln\dfrac{n}{n+1}}{\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$

Barem.

a) Determină formula termenului general al şirului…………………………………………… Finalizare………………………………………………………………………………………	2 p 1p
b) Calculul limitei…………………………………………………………………………………..	1 p
c) Calculul limitei…………………………………………………………………………………..	3 p

4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_{n+1}=1+\ln\dfrac{x_n^2+1}{2x_n}$, $\forall n \geq 1$, $x_1 \geq 1$. Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Anca Andrei, Suceava

Soluţie. Dacă $x \geq 1 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2+1 \geq 2x \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2+1}{2x} \geq 1 \;\Rightarrow \ln\dfrac{x^2+1}{2x} \geq 0 \;\Rightarrow\; 1+\ln\dfrac{x^2+1}{2x} \geq 1$.

Inductiv se arată că $x_n \geq 1$, $\forall n \geq 1$.

Deoarece: $1 \le x \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{2x} \le x \Rightarrow 1+\ln\dfrac{x^2+1}{2x} \le 1+\ln x \le x$, rezultă că

$x_{n+1}-x_n = 1+\ln\dfrac{x_n^2+1}{2x_n}-x_n \le 0 \Rightarrow (x_n)_{n\ge 1}$ este descrescător şi mărginit inferior de 1, deci este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \ge 1$. Trecând la limită relaţia de recurenţă se obţine $l = 1+\ln\dfrac{l^2+1}{2l}$.

Dar $x_{n+1} \le 1+\ln x_n \le x_n \Rightarrow 1+\ln l = l \Rightarrow l = 1$.

Barem.

Arată inductiv că şirul este mărginit inferior de 1 ………………………………………………	3 p
$(x_n)_{n\ge 1}$ este descrescător………………………………………………………………………..	2 p
Obţine $l = 1+\ln\dfrac{l^2+1}{2l}$ ………………………………………………………………………	1 p
Finalizare $l = 1$…………………………………………………………………………………..	1 p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.