Concursul județean de matematică Dan Hulubei, Galați

28 aprilie 2012

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluție, rezolvare**	**Punctaj**
1,	**a).** $x, y \in (-1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lvert x \rvert < 1 \\ \lvert y \rvert < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lvert xy \rvert < 1 \Leftrightarrow -1 < xy < 1 \Rightarrow xy + 1 > 0.$	1p
	$x * y \in (-1,1) \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} \in (-1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} < 1 \\ \frac{x+y}{1+xy} > -1 \end{cases}$	
	Dar $1 + xy > 0$	1p
	Atunci $\begin{cases} x+y < 1+xy \\ x+y > -1-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1-xy < 0 \\ x+y+1+xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(1-y) < 0 \\ (x+1)\cdot(y+1) > 0 \end{cases}$ adevărat pentru $(\forall)$ x,y $\in (-1,1)$.	1p
	b). $f \vdots g \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(i) = 0 \\ f(-i) = 0 \end{cases}$	1p
	$g = (x+1)(x^2+1);$	1p
	$g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ sau \\ x^2+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ sau \\ x = i \\ sau \\ x = -i \end{cases}$	1p
	Demonstrarea că $f(-1) = 0$; $f(i) = 0$; $f(-i) = 0$	1p
2.	Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ (funcție elementară)și f continuă pe $[0, \infty)$ (funcție elementară)	1p
	Problema continuității se pune în $x = 0$. Funcția f este continuă în $x = 0$ dacă $f(0-0) = f(0+0) = f(0) \Rightarrow a = 0.$	1p

	b). $a=0 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, x\in(-\infty,0) \\ e^x \quad ,\text{x}\in[0,\infty) \end{cases}$.	**1p**
	$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+c_1,\ x\in(-\infty,0) \\ e^x+c_2 \quad ,\ \text{x}\in[0,\infty) \end{cases}$	**1P**
	$F(0)=1 \Rightarrow 1+c_2=1 \Rightarrow c_2=0;$	**1p**
	Din F primitiva funcției $f \Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow F$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ F continuă în x=0 $\Rightarrow F(0-0)=F(0+0)=F(0) \Rightarrow c_1=1+c_2;$ Dar $\text{c}_2=0,$rezultă $\text{c}_1=1.$	**1p**
	Deci $\quad F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+1,\ x\in(-\infty,0) \\ e^x \quad ,\ \text{x}\in[0,\infty) \end{cases}$	**1p**
3.	**a).** $I_0=\ln\dfrac{6}{5};$ $I_1=1-5\cdot\ln\dfrac{6}{5}.$	**1p** **2p**
	b). $I_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}-5\cdot I_n, n\in\mathbb{N}$	**4p**