Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

11 februarie 2012

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$arctg\ \frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-arctg\ x\Rightarrow\frac{1}{x}=tg\left(\frac{\pi}{2}-arctg\ x\right)\Rightarrow\frac{1}{x}=ctg\left(arctg\ x\right)\Rightarrow$ $\frac{1}{x}=\frac{1}{tg\left(arctg\ x\right)}(A).$	3p
	Fie $I=\int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{(x+1)\cdot arctg\ x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}dx=\int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{x}\right)}{x^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}dx$	1p
	Notam $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt.$ Pentru $x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=4;$ Pentru $x=4\Rightarrow t=\frac{1}{4};$ $I=\int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{(1+t)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-arctgt\right)}{t\cdot\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{1}{t\cdot\sqrt{1+t^2}}dt+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt-\int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{(1+t)\cdot arctgt}{t\cdot\sqrt{1+t^2}}dt=$ $I=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{1}{t^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}dt+\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big\vert_{\frac{1}{4}}^{4}-I\Rightarrow$ $I=-\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)\Big\vert_{\frac{1}{4}}^{4}+\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big\vert_{\frac{1}{4}}^{4}-I\Rightarrow$ $2\cdot I=\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\ln\frac{4\cdot\left(4+\sqrt{17}\right)}{1+\sqrt{17}}\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\cdot\ln\frac{4\cdot\left(4+\sqrt{17}\right)}{1+\sqrt{17}}.$	3p

2.	Deoarece funcția f admite primitive, rezultă că există $G:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabilă şi $G'(x)=f(x),\ (\forall)x\in(a,b)$. Pe intervalul (a,x_0) avem $F'(x)=G'(x)$.Rezultă că $(\exists)k_1\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)=G(x)+k_1,\ (\forall x)\in(a,x_0)$. La fel $(\exists)k_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)=G(x)+k_2,\ (\forall)x\in(x_0,b)$.	3p
	Dar funcțiile F, G sunt continue în $x_0\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} F(x)=F(x_0)$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} G(x)=G(x_0)\Rightarrow F(x_0)=G(x_0)+k_1$. La fel $F(x_0)=G(x_0)+k_2$.Rezultă $k_1=k_2$. Asadar, $F(x)=G(x)+k,\ (\forall)x\in(a,b), k_1=k_2=k$. Deci, $F=G+k$, de unde rezultă că F este o primitivă a funcției f.	2p
	b). Fie F o primitivă a funcției f. Atunci $f\cdot g=(F\cdot g)'-F\cdot g'$, F este continuă, g' este continuă, deci $F\cdot g'$ ar $(F\cdot g)'$ are primitive, deci $f\cdot g$ are primitive.	2p
3.	**a).** $\int_a^b x\cdot f(x)\,dx\le\int_a^b x\cdot f(b)\,dx=f(b)\cdot\int_a^b x\,dx=$ $=\frac{b^2-a^2}{2}\cdot f(b)\le(b^2-a^2)\cdot f(b)\le b^2\cdot f(b)-a^2\cdot f(a)$.	4p
	b). $\int_a^b f(x)dx=0\Rightarrow F(a)=F(b)\overset{T.Rolle}{\Rightarrow}(\exists)c\in(a,b)$ astfel încât $F'(c)=0\Rightarrow f(c)=0$ Din a<c<b şi f descrescătoare $\Rightarrow f(a)>f(c)>f(b)$ $\Rightarrow f(a)>0>f(b)\Rightarrow f(a)\cdot f(b)<0$.	3p
4.	$\lvert G\rvert=3n+1\Rightarrow x^{3n+1}=e,\ (\forall)x\in G$. $a^{3n+1}=e\Rightarrow a^{3n}=a^{-1}\Rightarrow a=\left(a^{3n}\right)^{-1}\Rightarrow a^2=\left(a^{-1}\right)^{6n}$.Luam $x=\left(a^{-1}\right)^{2n}$. *Daca* $x^3=a^2,\ y^3=a^2\Big\rvert^{n}\Rightarrow x^{3n}=y^{3n}\Rightarrow x^{-1}=y^{-1}\Rightarrow x=y$.	4p

	Din f endomorfism de grupuri $\Rightarrow (xy)^n = x^n \cdot y^n \Rightarrow (yx)^{n-1} = x^{n-1} \cdot y^{n-1} \Big\|^n \Rightarrow (yx)^{n^2-n} = x^{n^2-n} \cdot y^{n^2-n}$. (1) Dar $x^{n^2-n-1} = e \Rightarrow x^{n^2-n} = x; (1) \Leftrightarrow yx = xy$. Deci G este grup abelian.	**3p**