

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 18 februarie 2012

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XII-a

1. Fie (G, \cdot) un grup și funcția $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^2$.

a) (3p) Să se demonstreze că f este endomorfism al grupului G dacă și numai dacă (G, \cdot) este grup abelian.

b) (4p) Dacă G este grup comutativ și are un număr impar de elemente, să se demonstreze că funcția f este automorfism al grupului G .

Mihai Piticari și Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluție. a) Dacă f este endomorfism al grupului G , atunci $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in G$.

Atunci $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall x, y \in G$, adică $xyxy = xxyy$, $\forall x, y \in G$. Simplificând la stânga prin x și la dreapta prin y obținem $yx = xy$, $\forall x, y \in G$, deci (G, \cdot) este grup abelian.

Dacă (G, \cdot) este grup abelian, atunci $\forall x, y \in G$ avem $f(xy) = (xy)^2 = xyxy = xxyy = x^2y^2 = f(x)f(y)$, adică f este endomorfism al grupului G .

b) Fie (G, \cdot) un grup comutativ cu $2n+1$ elemente ($n \in \mathbb{N}$). Dacă e este elementul neutru al grupului, atunci $x^{2n+1} = e$, $\forall x \in G$.

Arătăm că f este injectivă. Dacă $a, b \in G$ și $f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a^{2n} = b^{2n}$.

Dar $a^{2n+1} = b^{2n+1} \Rightarrow a^{2n} \cdot a = b^{2n} \cdot b \Rightarrow a = b$.

Prin urmare f este injectivă și cum G este mulțime finită, rezultă că f este bijectivă.

Cum (G, \cdot) este grup abelian, conform a) rezultă că f este endomorfism al grupului G .

În concluzie, f este automorfism al grupului G .

Barem.

a) f este endomorfism al grupului G dacă $\Rightarrow (G, \cdot)$ este grup abelian.	2 p
(G, \cdot) este grup abelian $\Rightarrow f$ este endomorfism al grupului G	1 p
b) $\text{ord}(G) = 2n+1 \Rightarrow x^{2n+1} = e$, $\forall x \in G$	1 p
f este injectivă	1 p
f este bijectivă	1 p
f este autoomorfism al grupului G	1 p

2. Pe mulțimea nevidă A se consideră legea de compoziție " \circ " cu următoarele proprietăți:

i) există $e \in A$ astfel încât $e \circ a = a$ pentru orice $a \in A$;

ii) $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ d) \circ (c \circ b)$ oricare ar fi $a, b, c, d \in A$.

Să se demonstreze că legea " \circ " este comutativă, asociativă și admite element neutru.

Cătălin Țigăeru, Suceava

Soluție. Observăm că $e \circ e = e$ și folosind i) avem $(e \circ e) \circ (e \circ a) = e \circ a = a$.

Pe de altă parte, din ii) deducem $(e \circ e) \circ (e \circ a) = (e \circ a) \circ (e \circ e) = a \circ e$.

Avem $e \circ a = a \circ e = a$, $\forall a \in A$, prin urmare legea " \circ " admite elementul neutru e .

Pentru orice $a, b \in A$ avem: $(e \circ a) \circ (b \circ e) = a \circ b$ (pentru că e este element neutru) și, din ii),

$$(e \circ a) \circ (b \circ e) = (e \circ e) \circ (b \circ a) = b \circ a. \text{ Rezultă că } a \circ b = b \circ a.$$

Pentru asociativitate, folosind ii) și comutativitatea legii " \circ ", putem scrie:

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ b) \circ (c \circ e) = (a \circ e) \circ (c \circ b) = a \circ (c \circ b) = a \circ (b \circ c).$$

Barem.

e este element neutru	3 p
" \circ " este comutativă	2 p
" \circ " este asociativă	2 p

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție strict monotonă cu proprietatea că funcția $f_n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (unde compunerea se face de $n-1$ ori, $n \geq 2$, iar $f_1 = f$) admite primitive.

Demonstrați că f este funcție continuă.

Anca Andrei, Suceava

Soluție. Deoarece f este strict monotonă rezultă că f_n este strict monotonă. Cum f_n admite primitive rezultă că f_n are proprietatea lui Darboux, prin urmare f_n este continuă. Dacă $n=1$ demonstrația este completă. Presupunem că $n \geq 2$. Arătăm că f_{n-1} are proprietatea lui Darboux prin reducere la absurd. Prin urmare există $a < b$ astfel încât $f_{n-1}([a, b])$ nu este interval. Presupunem că f este strict crescătoare și deci f_{n-1} este strict crescătoare, de unde rezultă că

$$(1) \quad (\exists) y_0 \in [f_{n-1}(a), f_{n-1}(b)] \text{ astfel încât } f_{n-1}(x) \neq y_0, \forall x \in [a, b]$$

$$(2) \quad f_n([a, b]) = [f_n(a), f_n(b)]$$

Din $f_{n-1}(a) \leq y_0 \leq f_{n-1}(b) \Rightarrow f_n(a) \leq f(y_0) \leq f_n(b)$. Cum f_n este continuă, utilizând (2) va rezulta că există $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f_n(x_0) = f(y_0)$. Deoarece f este funcție injectivă, obținem că $f_{n-1}(x_0) = y_0$, ceea ce contrazice relația (1). Prin urmare, f_{n-1} are proprietatea lui Darboux și cum este strict monotonă, rezultă că f_{n-1} este continuă. Analog se demonstrează și cazul când f este strict descrescătoare.

Repetând procedeul de $n-1$ ori se deduce că f este funcție continuă.

Barem.

f_n este continuă	3 p
f_{n-1} este continuă	3 p
Finalizare	1 p

4. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ continuă și crescătoare.

Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{2013} \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 x^{2012} f(x^{2012}) dx \leq \frac{1}{2012} \int_0^1 f(x) dx.$$

Mihai Piticari și Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluție. Pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $x^{2012} \leq x^{2011}$, de unde rezultă

$$\int_0^1 x^{2012} f(x^{2012}) dx \leq \int_0^1 x^{2011} f(x^{2012}) dx \quad (1)$$

Cu schimbarea de variabilă $t = x^{2012}$, obținem $\int_0^1 x^{2011} f(x^{2012}) dx = \frac{1}{2012} \int_0^1 f(t) dt$ (2)

Pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $x^{2013} \leq x^{2012}$ și cum f este crescătoare rezultă $f(x^{2013}) \leq f(x^{2012})$.

Atunci $x^{2012} f(x^{2013}) \leq x^{2012} f(x^{2012})$, $\forall x \in [0, 1]$. Prin integrare obținem

$$\int_0^1 x^{2012} f(x^{2013}) dx \leq \int_0^1 x^{2012} f(x^{2012}) dx \quad (3)$$

Cu schimbarea de variabilă $t = x^{2013}$, obținem $\int_0^1 x^{2012} f(x^{2013}) dx = \frac{1}{2013} \int_0^1 f(t) dt$ (4)

Din (1), (2), (3) și (4) rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

Barem.

(1)	2 p
(2)	1 p
(3)	3 p
(4)	1 p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.