OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2012

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a XII-a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi funcţia $f:G\to G$, $f(x)=x^2$.

a) (3p) Să se demonstreze că f este endomorfim al grupului G dacă şi numai dacă $(G,\cdot)$ este grup abelian.

b) (4p) Dacă G este grup comutativ şi are un număr impar de elemente, să se demonstreze că funcţia f este automorfim al grupului G.

Mihai Piticari şi Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

<u>Soluţie.</u> a) Dacă f este endomorfim al grupului G, atunci $f(xy)=f(x)f(y)$, $\forall x,y\in G$.

Atunci $(xy)^2=x^2y^2$, $\forall x,y\in G$, adică $xyxy=xxyy$, $\forall x,y\in G$. Simplificând la stânga prin x şi la dreapta prin y obţinem $yx=xy$, $\forall x,y\in G$, deci $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Dacă $(G,\cdot)$ este grup abelian, atunci $\forall x,y\in G$ avem $f(xy)=(xy)^2=xyxy=xxyy=x^2y^2=f(x)f(y)$, adică f este endomorfim al grupului G.

b) Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu $2n+1$ elemente $(n\in\mathbb{N})$. Dacă e este elementul neutru al grupului, atunci $x^{2n+1}=e$, $\forall x\in G$.

Arătăm că f este injectivă. Dacă $a,b\in G$ şi $f(a)=f(b)\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a^{2n}=b^{2n}$.

Dar $a^{2n+1}=b^{2n+1}\Rightarrow a^{2n}\cdot a=b^{2n}\cdot b\Rightarrow a=b$.

Prin urmare f este injectivă şi cum G este mulţime finită, rezultă că f este bijectivă.

Cum $(G,\cdot)$ este grup abelian, conform a) rezultă că f este endomorfim al grupului G.

În concluzie, f este automorfism al grupului G.

<u>Barem.</u>

a) f este endomorfim al grupului G dacă $\Rightarrow$ $(G,\cdot)$ este grup abelian.	2 p
$(G,\cdot)$ este grup abelian $\Rightarrow f$ este endomorfim al grupului G	1 p
b) $ord(G)=2n+1\Rightarrow x^{2n+1}=e$, $\forall x\in G$	1 p
f este injectivă	1 p
f este bijectivă	1 p
f este autoomorfim al grupului G	1 p

2. Pe mulţimea nevidă A se consideră legea de compoziţie "$\circ$" cu următoarele proprietăţi:

i) există $e\in A$ astfel încât $e\circ a=a$ pentru orice $a\in A$;

ii) $(a\circ b)\circ(c\circ d)=(a\circ d)\circ(c\circ b)$ oricare ar fi $a,b,c,d\in A$.

Să se demonstreze că legea "$\circ$" este comutativă, asociativă şi admite element neutru.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

Soluție. Observăm că $e \circ e = e$ şi folosind i) avem $(e \circ e) \circ (e \circ a) = e \circ a = a$.
Pe de altă parte, din ii) deducem $(e \circ e) \circ (e \circ a) = (e \circ a) \circ (e \circ e) = a \circ e$.
Avem $e \circ a = a \circ e = a$, $\forall a \in A$, prin urmare legea "$\circ$" admite elementul neutru *e*.

Pentru orice $a, b \in A$ avem: $(e \circ a) \circ (b \circ e) = a \circ b$ (pentru că *e* este element neutru) şi, din ii), $(e \circ a) \circ (b \circ e) = (e \circ e) \circ (b \circ a) = b \circ a$. Rezultă că $a \circ b = b \circ a$.

Pentru asociativitate, folosind ii) şi comutativitatea legii "$\circ$", putem scrie:
$(a \circ b) \circ c = (a \circ b) \circ (c \circ e) = (a \circ e) \circ (c \circ b) = a \circ (c \circ b) = a \circ (b \circ c)$.

Barem.

e este element neutru	3 p
"$\circ$" este comutativă	2 p
"$\circ$" este asociativă	2 p

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie strict monotonă cu proprietatea că funcţia $f_n = f \circ f \circ ... \circ f$ (unde compunerea se face de $n-1$ ori, $n \geq 2$, iar $f_1 = f$) admite primitive.

Demonstraţi că f este funcţie continuă.

Anca Andrei, Suceava

Soluție. Deoarece f este strict monotonă rezultă că f_n este strict monotonă. Cum f_n admite primitive rezultă că f_n are proprietatea lui Darboux, prin urmare f_n este continuă. Dacă $n = 1$ demonstraţia este completă. Presupunem că $n \geq 2$. Arătăm că f_{n-1} are proprietatea lui Darboux prin reducere la absurd. Prin urmare există $a < b$ astfel încât $f_{n-1}([a,b])$ nu este interval. Presupunem că f este strict crescătoare şi deci f_{n-1} este strict crescătoare, de unde rezultă că

(1) $(\exists)\, y_0 \in [f_{n-1}(a), f_{n-1}(b)]$ astfel încât $f_{n-1}(x) \neq y_0$, $\forall x \in [a,b]$

(2) $f_n([a,b]) = [f_n(a), f_n(b)]$

Din $f_{n-1}(a) \leq y_0 \leq f_{n-1}(b) \Rightarrow f_n(a) \leq f(y_0) \leq f_n(b)$. Cum f_n este continuă, utilizând (2) va rezulta că există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f_n(x_0) = f(y_0)$. Deoarece f este funcţie injectivă , obţinem că $f_{n-1}(x_0) = y_0$, ceea ce contrazice relaţia (1). Prin urmare, f_{n-1} are proprietatea lui Darboux şi cum este strict monotonă, rezultă că f_{n-1} este continuă. Analog se demonstrează şi cazul cazul când f este strict descrescătoare.

Repetând procedeul de $n-1$ ori se deduce că f este funcţie continuă.

Barem.

f_n este continuă	3 p
f_{n-1} este continuă	3 p
Finalizare	1 p

4. Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ continuă şi crescătoare.

Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{2013}\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{2012} f\left(x^{2012}\right)dx \leq \frac{1}{2012}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Mihai Piticari şi Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluţie. Pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $x^{2012} \le x^{2011}$, de unde rezultă

$$\int_0^1 x^{2012} f\left(x^{2012}\right) dx \le \int_0^1 x^{2011} f\left(x^{2012}\right) dx \qquad (1)$$

Cu schimbarea de variabilă $t = x^{2012}$, obţinem $\int_0^1 x^{2011} f\left(x^{2012}\right) dx = \frac{1}{2012} \int_0^1 f(t)\, dt \qquad (2)$

Pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $x^{2013} \le x^{2012}$ şi cum f este crescătoare rezultă $f\left(x^{2013}\right) \le f\left(x^{2012}\right)$.

Atunci $x^{2012} f\left(x^{2013}\right) \le x^{2012} f\left(x^{2012}\right)$, $\forall x \in [0, 1]$. Prin integrare obţinem

$$\int_0^1 x^{2012} f\left(x^{2013}\right) dx \le \int_0^1 x^{2012} f\left(x^{2012}\right) dx \qquad (3)$$

Cu schimbarea de variabilă $t = x^{2013}$, obţinem $\int_0^1 x^{2012} f\left(x^{2013}\right) dx = \frac{1}{2013} \int_0^1 f(t)\, dt \qquad (4)$

Din (1), (2), (3) şi (4) rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

Barem.

(1)	2 p
(2)	1 p
(3)	3 p
(4)	1 p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.