OLM : Clasa a XII-a

BAREM

Subiectul 1.

a) ...(1p)

b) $(G, \circ)$ grup ...(4p)

c) Determinarea elementelor de ordin finit ... (2p)

2\. Problemă clasa a XII-a — OLM: BAREM - Subiectul 2

Fie $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile cu derivata continuă, astfel încât $A \cap B = \emptyset$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\}$. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție.

a) Demonstrați echivalența: f admite primitive $\Leftrightarrow$ $f \cdot g$ și $f \cdot h$ admit primitive.

b) Echivalența de la punctul (a) rămâne adevărată dacă $A \cap B \neq \emptyset$?

(Ilie Chichirim)

Soluție: Vom folosi rezultatul: Lemă: Dacă $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

a) u A.P. și v de clasă C^1 atunci $u \cdot v$ A.P. ---- (1p)

Demonstrația rezultatului precedent ---- (1p)

$$u = U' ;\ (U \cdot v)' = U' v + U \cdot v' = u \cdot v + U \cdot v' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u \cdot v = \underbrace{(U \cdot v)'}_{AP} - \underbrace{U \cdot v'}_{cont \Rightarrow AP} \Rightarrow u \cdot v \text{ A.P.}$$

"$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l} f \text{ A.P.} \\ g \text{ și } h \text{ de clasă } C^1 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{rezultatului}} f \cdot g$ A.P. și $f \cdot h$ AP ---- (1p)

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l} f \cdot g \text{ AP} \xRightarrow{L} f \cdot g \cdot g \text{ AP} \Rightarrow f \cdot g^2 \text{ AP.} \\ f \cdot h \text{ AP} \xRightarrow{L} f \cdot h \cdot h \text{ AP} \Rightarrow f \cdot h^2 \text{ AP.} \end{array}\right\} \xRightarrow{(+)}$

$\Rightarrow f(g^2 + h^2)$ A.P.

Deoarece $A \cap B = \emptyset \Rightarrow g^2 + h^2 > 0$ pe $\mathbb{R} \Rightarrow (\exists)\, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$u(x) = \dfrac{1}{g^2(x) + h^2(x)}$ de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$ (pt. că g și h de clasă C^1!)

b) Dacă $A \cap B \neq \phi$ atunci echivalența nu mai este adevărată. Contraexemplu: $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} ; \quad g(x) = h(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Avem $f \cdot g = f \cdot h = 0 \Rightarrow f \cdot g$ și $f \cdot h$ A.P.

g și h sunt de clasă C^1

și totuși f nu AP.

pt. că $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ nu este interval. ...... (2p)

OLM : BAREM - Subiectul 3 - Cls. XII

3. Calculați $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2-x+2}}\,dx$.

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2-x+2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\operatorname{arctg}\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-\left(\frac{1}{2}-x\right)+2}}\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2-x+2}}\,dx \text{ ..... (2p)}$$

$$2I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2-x+2}}\,dx \text{ (2p)}$$

Se arată că $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}-x\right)=\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2-x+2}$

$(\forall)\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ... (2p)

$$2I=\int_0^{\frac{1}{2}} dx=\frac{1}{2}\Rightarrow I=\frac{1}{4} \text{ ... (1p)}$$

OLM : BAREM – cls. a XII-a

Subiectul 4.

$$\sqrt[3]{f^2(x)\cdot(1-2f(x))} \le \frac{f(x)+f(x)+1-2f(x)}{3}=\frac{1}{3}$$

(2p)

$$\Rightarrow f^2(x)(1-2f(x)) \le \frac{1}{27} \Rightarrow$$ (1p)

$$\Rightarrow \sqrt{f^2(x)\cdot(1-2f(x))} \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$$ (1p)

$$\Rightarrow f(x)\cdot\sqrt{1-2f(x)} \le \frac{\sqrt{3}}{9}$$ (2p)

$$\Rightarrow \int_0^3 f(x)\cdot\sqrt{1-2f(x)}\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{9}\cdot 3=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ (1p)