Problema 1

Sa se determine $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ cu proprietatile:

i) $f(m+n) = f(n) + f(m) + 2mn, \forall\, m,n \in \mathbb{Z}$

ii) $f\big(f(1)\big) - f(1)$ este patrat perfect

Marin Ionescu, Pitesti

Solutie:

Fie $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $g(n)= f(n)-n^2$. Din conditia i) $\Rightarrow$ $g(m+n)=g(m)+g(n)$,…1p
$\forall$ m, $n\in\mathbb{Z}$. Se arata ca $g(0)=0$ si g este functie impara……………………..2p
Se obtine prin inductie matematica ca $g(n)=n\cdot g(1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ si tinand cont ca g este impara$\Rightarrow$ $g(k)=k\cdot g(1)$, $\forall$ $k\in\mathbb{Z}$. ……………………………...2p
Obtinem $f(k)=k^2+k(f(1)-1)$. Fie $p=f(1)-1$, $p\in\mathbb{Z}$ si inlocuind in ultima relatie pe k cu p obtinem $f(p)=2p^2$ atunci obtinem
$2p^2 =f(p)=f(f(1)-1)=f(f(1)-f(1))$=patrat perfect$\Rightarrow p=0\Rightarrow f(k)=k^2$,
$\forall$ $k\in\mathbb{Z}$, functie ce verifica relatia din enunt………………………………….2p

Problema 2

Daca $x, y, z \in \mathbb{C}$, demonstrati ca:

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y + z| + |x - z| + |z - y| + |y - z|.$$

G.M. (selectata de Gheorghe Duta C.N. Radu Greceanu)

Solutie

$|x + y| + |x - y| \geq |x + y + x - y| = 2|x|$ si

$|x + y| + |x - y| \geq |x + y - x + y| = 2|y|$ ………………………….2p

Din cele doua relatii prin adunare rezulta $|x+y|+|x-y| \geq |x|+|y|$…………..1p

Sumand si egalitatile analoage rezulta:

$|x+y|+|y+z|+|z+x|+|z-y|+|y-z|+|z-x| \geq 2(|x|+|y|+|z|)$………………………..2p

Din inegalitatea lui Hlawka avem:

$|x+y+z|+|x|+|y|+|z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|$………………………..1p

Si adunand cu inegalitatea precedent obtinem concluzia………………...1p

Problema 3

Fie numerele reale positive $a_1<a_2<...<a_{2011}$. Aratati faptul ca aceste numere reprezinta o progresie geometrica este o conditie si suficienta dar nu si necesara pentru a avea

$$a_1 \cdot a_{2011} = a_2 \cdot a_{2010} = \cdots = a_{1005} \cdot a_{1006}$$

Teodor Radu, C.N. Radu Greceanu, Slatina

Solutie

Daca $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ este o progresie geometrica de ratie q atunci

$a_1.a_{2011} = a_2 \cdot a_{2010} = \cdots = a_{1005} \cdot a_{1006} = a_1^2 \cdot q^{2010}$……………………..2p

Pentru reciproca folosim urmatorul rezultat.

Daca numerele positive $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ sunt in progresia geometrica acest lucrueste echivalent cu faptul ca $\lg a_1, \lg a_2, \ldots, \lg a_{2011}$, se afla in progresia aritmetica…..1p

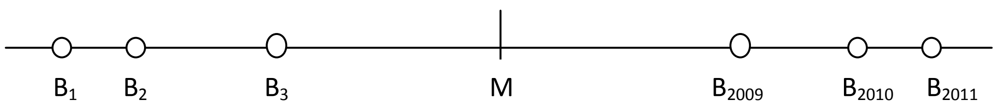
Prin logaritmarea produsului vom avea $\lg a_1 + \lg a_{2011} = \lg a_2 + \lg a_{2010} = \cdots = \lg a_{1005} + \lg a_{1006}$. Notam cu $b_k=\lg a_k$ si B_k va reprezenta imaginea pe axa reala a numerelor b_k……………………………………………………….……………..1p

Vom avea:

$\frac{b_1+b_{2011}}{2} = \frac{b_2+b_{2010}}{2} = \cdots = \frac{b_{1005}+b_{1006}}{2} \Leftrightarrow$

$mijlocul\ (B_1B_{2011}) = mijlocul(B_2B_{2010}) = \cdots = mijlocul(B_{1005}B_{1006})$.

Ceea ce nu implica toate segmentele congruente. Avem congruente de tipul $B_1B_2 \equiv B_{2010}B_{2011}$; $B_2B_3 \equiv B_{2009}B_{2010}$ ……………………………………………2p



Segmentele negongruente implica faptul ca $b_1, b_2, \ldots, b_{2011}$ nu reprezinta obligatoriu o progresie aritmetica $\Rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ nu reprezinta obligatoriu o progresie geometrica…………………………………………………………1p

Problema 4

Pe latura *(BC)* a triunghiului *ABC* consideram punctul *D* astfel incat $\frac{m(\widehat{BAD})}{m(\widehat{BAC})} = \frac{k}{n}, k, n \in \mathbb{N}^*$. Arati ca:

$$\frac{n}{AD} > \frac{n-k}{AB} + \frac{k}{AC}$$

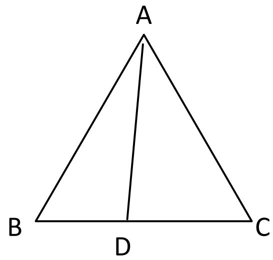
Nitu Cosmin, Bucuresti

Solutie.

Lema: Fie ABC un triunghi si AD, $D \in (BC)$, bisectoarea unghiului A. Atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{AD} > \frac{\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}}{2}$$

Demonstratia lemei.



Din relatiile:

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \sin A}{2}$$

$$A_{ABC} = A_{ABD} + A_{ADC} = \frac{AB \cdot AD \sin \frac{A}{2}}{2} + \frac{AC \cdot AD \sin \frac{A}{2}}{2}$$

Obtinem ca $\frac{1}{AD} = \frac{\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}}{2 \cos \frac{A}{2}}$ de unde rezulta inegalitatea ceruta si demonstratia lemei se incheie……2p

Notam $m(\angle BAC) = \alpha$ si pentru un punct oarecare $P \in (BC)$, $m(\angle BAP) = x$. Cu aceste notatii, consideram functia $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$, $f(x) = AP$. In aceste conditii, inegalitatea se rescrie:

$$f\left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot 0 + \frac{k}{n} \cdot \alpha\right) > \left(1 - \frac{k}{n}\right) f(0) + \frac{k}{n} f(\alpha)$$

……………………………………………………3p

Este suficient sa aratam ca f este strict concava in sensul lui Jensen, ceea ce revine la a arata ca

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x) + f(y)}{2}, \ \forall x, y \in [0, \alpha]$$

inegalitate ce rezulta din lema, ceea ce incheie demonstratia…………………………………………2p