Concursul județean de matematică “Dan Hulubei”, Galati

28 aprilie 2012

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluție, rezolvare**	**Punctaj**
1.	**a)** 1)B este inversabilă în $M_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.	**1p**
	$\det(B) = a^3 - 2a^2 + a$. Din det(B)=0 rezultă $a \in \{0;1\}$ B este inversabilă$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.	**1p**
	2)Din1) avem că $A^3 = a \cdot I_3 \Rightarrow A^6 = a^2 \cdot I_3 \Rightarrow ... \Rightarrow A^{3\cdot n} = a^n \cdot I_3$. $S_n = \left(a + a^2 + a^3 + ... + a^n\right) \cdot I_3$.	**1p**
	Cum $a, a^2, a^3, ..., a^n$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice de ratie q=a Avem $S_n = \begin{cases} n \cdot I_3 & ,\text{dacă } a = 1 \\ \dfrac{a \cdot \left(a^n - 1\right)}{a - 1} & ,\text{dacă } a \neq 1 \end{cases}$	**1p**
	b) Caz $\frac{0}{0}$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{9 - x^3} = \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3} = 1 \Rightarrow$ L=$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{9 - x^3} - \sqrt{x^2 - 3}}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{9 - x^3} - 1}{x^2 + x - 6} + \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{x^2 + x - 6}$.	**1p**
	Dar $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{9 - x^3} - 1}{x^2 + x - 6} = \dfrac{-12}{5 \cdot 3} = -\dfrac{4}{5}$; .	**1p**
	$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{x^2 + x - 6} = \dfrac{-4}{5 \cdot 2} = -\dfrac{2}{5}$ Rezultă $L = \dfrac{-4}{5} + \dfrac{-2}{5} = -\dfrac{6}{5}$	**1p**
2.	a) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & q & r \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Se calculeaza $A \cdot X$ şi $X \cdot A$	**2p**
	şi se obține $\begin{cases} x = v = r \\ u = q \\ y = z = t = 0 \end{cases} \Rightarrow (\exists) \begin{cases} a = x = v = r \in \mathbb{R} \\ b = u = q \in \mathbb{R} \\ c = p \in \mathbb{R}, \end{cases}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.	**1p** **1p**

	b)Dacă Y este soluție a ecuației $\Rightarrow Y^2 = A$.	**1p**
	bCum $Y\cdot A = Y\cdot Y^2 = Y^3 = Y^2\cdot Y = A\cdot Y$ rezultă, conform a), că $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Din $Y^2 = A \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ 2\cdot a\cdot b = 1 \\ b^2 + 2\cdot a\cdot c = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow 0 = 1$(fals). Deci ecuația nu are soluții în $M_3(\mathbb{R})$.	**1p** **1p**
3.	a)f continuă în x=0 $\Leftrightarrow (\exists)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$.	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(m^2\cdot x + 4\right) = 4 = f(0);$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\ln\left(x^4+1\right) + 2\cdot m\cdot \operatorname{arctg}(x) + n^2\right) = n^2, (\forall) m \in \mathbb{R}$ De unde avem că $n^2 = 4 \Leftrightarrow n = \pm 2 \Leftrightarrow \lvert n\rvert = 2$. Deci f continuă în x=0 $\Leftrightarrow (\forall) m \in \mathbb{R}$ și $\lvert n\rvert = 2, n \in \mathbb{R}$.	**1p** **1p**
	b)Funcția f este derivabilă în x=0 $\Rightarrow$ f continuă în x=0 $\overset{a)}{\Rightarrow} n^2 = 4$. Funcția f este derivabilă în x=0 $\Leftrightarrow (\exists)\ f_s'(0) = f_d'(0) \in \mathbb{R}$. $f_s'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{m^2\cdot x}{x} = m^2 \in \mathbb{R}$ $f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\ln(x^4+1)}{x^4}\cdot x^3 + 2\cdot m\cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1\cdot 0 + 2\cdot m\cdot 1$ De unde m=0 sau m=2.Rezultă $B = \{(2,2),(2,0),(-2,2),(-2,0)\}$	**1p** **1p** **1p** **1p**