Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
Colegiul Naţional C. Carabella Târgovişte
SSMR Filiala Dâmboviţa

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "CEZAR IVĂNESCU" EDIŢIA A XIII-A, TÂRGOVIŞTE, 25 FEBRUARIE 2012

CLASA A V-A

Subiectul 1. a) Fie a, b, d, e cifre astfel încât $a+\overline{ab}=d+\overline{de}$. Demonstraţi că $a=d$ şi $b=e$.
b) Câte numere naturale de două cifre se pot scrie sub forma $x+\overline{xy}$, unde x, y sunt cifre, $x \neq 0$?

Andrei Eckstein, Timişoara

Subiectul 2. Suma a 11 numere naturale nenule, diferite este mai mică decât 96. Demonstraţi că se pot alege două din ele cu suma egală cu 11.

Maria Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 3. a) Fie $n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că unul şi numai unul din numerele 3^n+2^n şi 3^n-2^n se divide cu 5.
b) Demonstraţi că din orice patru pătrate perfecte, se pot alege două a căror diferenţă se divide cu 5.

Carmen Stoicescu, Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
Colegiul Naţional C. Carabella Târgovişte

SSMR Filiala Dâmboviţa

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "CEZAR IVĂNESCU"
EDIŢIA A XIII-A, TÂRGOVIŞTE, 25 FEBRUARIE 2012

CLASA A VI-A

Subiectul 1. Se dă ΔABC în care $AB = AC$ şi $m(\angle BAC) = 80^0$. Fie P, Q puncte în interiorul triunghiului astfel încât $m(\angle PBC) = m(\angle PCB) = 10^0$ şi $m(\angle QBC) = m(\angle QCB) = 30^0$. Dreptele BP şi QC se intersectează în R, iar dreptele CP şi BQ se intersectează în S. Demonstraţi că:
a) Punctele A, Q, P sunt coliniare.
b) Unghiurile $\angle AQB, \angle AQC, \angle BQC$ sunt congruente.
c) Triunghiul ARS este echilateral.

Maria Miheţ, Timişoara

Subiectul 2. Fie $k \geq 2$ un număr natural. Spunem că un număr natural $n \geq 2$ este *interesant* dacă există k numere naturale nenule astfel încât n nu divide niciunul dintre aceste numere, însă n divide produsul celor k numere.
a) Există numere prime n care sunt *interesante*?
b) Demonstraţi că orice număr compus n este *interesant*.

Andrei Eckstein, Timişoara

Subiectul 3. Fie p_1, p_2, p_3 numere prime astfel încât

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \in \mathbb{N}.$$

a) Demonstraţi că printre numerele p_1, p_2, p_3, nu pot fi două egale.
b) Demonstraţi că cel mai mic dintre numerele p_1, p_2, p_3 este egal cu 2.
c) Determinaţi numerele p_1, p_2, p_3.

* * *

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
Colegiul Naţional C. Carabella Târgovişte

SSMR Filiala Dâmboviţa

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "CEZAR IVĂNESCU"
EDIŢIA A XIII-A, TÂRGOVIŞTE, 25 FEBRUARIE 2012

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Fie AD înălţimea corespunzătoare ipotenuzei a unui triunghi dreptunghic ABC şi M, N proiecţiile lui D pe (AB), respectiv (AC). Demonstraţi că $AD^3 = BC \cdot BM \cdot CN$.

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Subiectul 2. Determinaţi numerele x, y, z, t, $u \geq 0$ care verifică relaţiile:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = u^3 \end{cases}.$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 3. Fie ΔABC şi $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ astfel încât $AA' \cap BB' \cap CC' = \{R\}$. Paralela prin R la dreapta BC intersectează $(A'C')$ şi $(A'B')$ în M, respectiv N. Demonstraţi că:
a) R este mijlocul segmentului (MN).
b) Dacă în plus $AA' \perp BC$, atunci $(A'A$ este bisectoarea unghiului $\angle B'A'C'$.

*** * ***

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
Colegiul Naţional C. Carabella Târgovişte

SSMR Filiala Dâmboviţa

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "CEZAR IVĂNESCU"
EDIŢIA A XIII-A, TÂRGOVIŞTE, 25 FEBRUARIE 2012

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Un plan intersectează muchiile (AB), (BC), (CD) şi (DA) ale tetraedrului $ABCD$ în punctele E, F, G, respectiv H. Demonstraţi că

$$AE \cdot BF \cdot CG \cdot DH = BE \cdot CF \cdot DG \cdot AH.$$

* * *

Subiectul 2. Fie a, b, $c > 0$ astfel încât $a + b + c = 3\sqrt{abc}$. Demonstraţi că:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Subiectul 3. Într-un sistem de axe ortogonale Oxy, punctele planului se colorează astfel: punctele cu ambele coordonate raţionale sunt roşii, punctele cu ambele coordonate iraţionale sunt galbene, iar punctele cu o coordonată raţională şi cealaltă coordonată iraţională sunt albastre. Demonstraţi că:
a) Nu există drepte monocolore.
b) Există drepte bicolore.
c) Există drepte tricolore.

Cornel Stoicescu, Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
Colegiul Naţional C. Carabella Târgovişte
SSMR Filiala Dâmboviţa

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "CEZAR IVĂNESCU" EDIŢIA A XIII-A, TÂRGOVIŞTE, 25 FEBRUARIE 2012

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Vom spune că un număr natural n este *interesant* dacă partea fracţionară a numărului $n\sqrt{2}$ este mai mică decât $3 - 2\sqrt{2}$. Demonstraţi că:
a) Există o infinitate de numere *interesante.*
b) Dacă n este *interesant*, atunci numerele $\left[n\sqrt{2}\right]$, $\left[(n+1)\sqrt{2}\right]$, $\left[(n+2)\sqrt{2}\right]$ sunt în progresie aritmetică.

Cristinel Mortici şi Cornel Stoicescu, Târgovişte

Subiectul 2. Fie a, b, c numere reale astfel încât

$$a^2 + b^2 + c^2 - a(b+c) = 2 - \sqrt{2}.$$

Demonstraţi că $b(c+a) \leq \sqrt{2}$ şi $c(a+b) \leq \sqrt{2}$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 3. Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon cu n laturi, unde $n \geq 4$. Notăm cu $G_1, G_2, ..., G_n$ centrele de greutate ale poligoanelor $A_2A_3...A_n$, $A_1A_3...A_n$, respectiv $A_1A_2...A_{n-1}$ (fiecare având câte $n-1$ laturi). Demonstraţi că dreptele A_1G_1, A_2G_2, ..., A_nG_n sunt concurente.

* * *

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
Colegiul Naţional C. Carabella Târgovişte

SSMR Filiala Dâmboviţa

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "CEZAR IVĂNESCU"
EDIŢIA A XIII-A, TÂRGOVIŞTE, 25 FEBRUARIE 2012

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinaţi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \\ 3^{x_1} + 3^{x_2} + ... + 3^{x_n} = 3 \end{cases}.$$

Maria Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 2. Fiecărui punct P din plan i se asociază număr real $f(P)$, astfel încât pentru orice paralelogram $XYZT$, avem $f(X)+f(Z) = f(Y)+f(T)$.
a) Demonstraţi că dacă M este mijlocul segmentului AB, atunci

$$f(M) = \frac{f(A) + f(B)}{2}.$$

b) Demonstraţi că dacă G este centrul de greutate al ΔABC, atunci

$$f(G) = \frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3}.$$

Dan - Ştefan Marinescu, Hunedoara

Subiectul 3. Se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$. Notăm cu A', B', C', D' centrele cercurilor lui Euler corespunzătoare ΔBCD, ΔCDA, ΔDAB, respectiv ΔABC. Arătaţi că AA', BB', CC', DD' sunt concurente.

Silouan Brazitikos, Atena

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "CEZAR IVĂNESCU" EDIŢIA A XIII-A, TÂRGOVIŞTE, 25 FEBRUARIE 2012

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii strict monotone, astfel încât funcţia $f \circ g$ este continuă. Demonstraţi că funcţia g este continuă.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 2. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie având proprietatea că pentru orice şir $(a_n)_{n \geq 1} \subset (0, \infty)$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = L \in [0, \infty)$, avem

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot ... \cdot f(a_n)} = f(L).$$

a) Arătaţi că pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ şi $x_1, x_2, ..., x_m \in (0, \infty)$, avem

$$f\left(\sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_m}\right) = \sqrt[m]{f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot ... \cdot f(x_m)}.$$

b) Arătaţi că pentru orice $a > 0$, există $b > a$ astfel încât funcţia f este mărginită pe intervalul $[a, b]$.

Dorel Miheţ, Timişoara

Subiectul 3. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, cu $x_1 = 1/2$, definit pentru orice $n \geq 1$, prin

$$x_{n+1} = \left(\frac{2x_n}{1 + x_n^2}\right)^{(-1)^n}$$

şi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det A = \det(A + B) = 0$. Demonstraţi că

$$\sum_{k=2}^{n} \det(A + x_k B) \det(A + x_{k+1} B) \leq 0, \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa SSMR Filiala Dâmboviţa
Colegiul Naţional C. Carabella Târgovişte

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "CEZAR IVĂNESCU" EDIŢIA A XIII-A, TÂRGOVIŞTE, 25 FEBRUARIE 2012

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Se consideră o mulţime nevidă, finită S, pe care s-a definit o operaţie asociativă " $\cdot$ ". Demonstraţi că pentru orice element $a \in S$, cu proprietatea că $a \neq a^k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, există un număr natural $n \geq 2$ şi $b \in S \setminus \{a^{n-1}\}$ astfel încât $ab = ba = a^n$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 2. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continuă şi periodică astfel încât

$$\int_0^n f(t)\,dt = f(n), \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstraţi că $f(x) = 0$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$.

Cornel Stoicescu, Târgovişte

Subiectul 3. Găsiţi funcţiile continue $f : [0, \pi/4] \to (0, \infty)$ cu proprietatea

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx + \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{f(x) + \ln(1 + \operatorname{tg} x)} = \frac{\pi(4 - \ln 2)}{8}.$$

Cristinel Mortici, Târgovişte