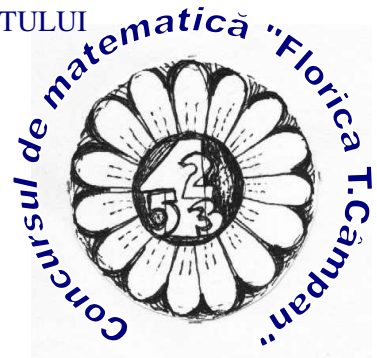


CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
 ETAPA JUDEȚEANĂ, 24 MARTIE 2012



Barem - Clasa a VI-a

1. a) Există numere raționale și neîntregi, notate a, b, c, d , cu proprietatea că $a - b \in \mathbb{Z}$ și $\frac{c}{d} \in \mathbb{Z}$?
 b) Dați exemple de numere $x, y, z, t \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $x + y \in \mathbb{Z}$ și $z \cdot t \in \mathbb{Z}$.
 c) Există $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât $a + b \in \mathbb{Z}$ și $a \cdot b \in \mathbb{Z}$?

Cristian Lazăr

Barem de corectare.

- a) De exemplu, putem alege $a = b = \frac{3}{2}$2p
 De exemplu, putem alege $c = d = \frac{4}{3}$2p
 b) De exemplu, putem alege $x = y = \frac{5}{2}$2p
 De exemplu, $z = 1,6; t = 2,5$2p
 c) Presupunem că există a și b cu proprietatea din enunț. Fie $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}$, cu $(m, n) = 1$,
 $(p, q) = 1$, cu $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$1p
 Avem $qn \mid mq + pn$ și $qn \mid mp$, de unde $qn \mid p^2n$, deci $q \mid p^2$, dar $(p, q) = 1$. În concluzie, nu există
 a și b cu proprietate cerută.4p
 Baza.2p

2. Ioana pleacă din punctul A spre punctul B iar, mai apoi, își continuă drumul către C și, la final, decide să se întoarcă în A. Punctele A, B, C sunt necoliniare. Se știe că drumurile făcute între două puncte sunt în linie dreaptă și că AB, BC, respectiv, CA au lungimi (în kilometri) exprimate prin numere naturale nenule.

- a) Dacă $AB + BC + CA = 5$ km, demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.
 b) Dacă $AB + BC + CA = 6$ km, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.
 c) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care $AB + BC + CA = n$ km și este posibil ca Ioana să parcurgă un drum care nu reprezintă un triunghi isoscel.

Cristian Lazăr

Barem de corectare.

- a) Nu putem avea toate laturile cu lungimi mai mari sau egale cu 2.1p
 Deci măcar o latură are lungimea 1. Nu putem avea două laturi de lungime 1 (folosim inegalitatea triunghiului). Singurul triunghi va fi cu laturile 2, 2, 1.3p
 b) Nu putem avea laturi de lungime 1.1p

- Deci cea mai mică latură are lungimea 2, de unde triunghiul este echilateral de latură 2.3p
- c) Să notăm lungimile laturilor cu a, b și c . Fără a pierde din generalitate, avem $a < b < c$1p
- Dacă $a = 1$, triunghiul trebuie să fie isoscel.1p
- Dacă $a = 2$, putem avea $b = 3$ și $c = 4$ pentru perimetru maxim.3p
- Observație. Se va ține cont de folosirea explicită a inegalității triunghiului.

3. Se știe că $A = \overline{aabbcccc}$ este pătrat perfect și $a \neq b \neq c \neq a$.

a) Arătați că $121 \mid A$.

b) Determinați toate numerele A cu proprietatea de mai sus.

Cristian Lazăr

Barem de corectare.

a) Se aplică criteriul de divizibilitate cu 11 sau se face efectiv împărțirea cu 11.3p

$11 \mid A$, A este pătrat perfect, 11 este număr prim $\Rightarrow 121 \mid A$2p

b) Avem $c \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Se elimină cazurile $c \in \{1, 5, 6, 9\}$ (cu ajutorul cazurilor $4k + 2$ sau $4k + 3$).4p

Deci rămâne $c \in \{0, 4\}$.

Dacă $c = 4$, atunci $A = M_4$ și rezultă că $\frac{A}{4} = \overline{\dots 1111}$, deci $A = 2^2(4k + 3)$ și rezultă că A nu este pătrat perfect.2p

Rămâne $c = 0$ și $A = \overline{aabb} \cdot 10^4$, deci e necesar ca \overline{aabb} să fie pătrat perfect. Analizând ca mai sus sau folosind că $121 \mid \overline{aabb}$, obținem că singura variantă este 77440000.2p

Baza.2p