MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI SPORTULUI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI
ȘCOALA NR. 22 "B. P. HAȘDEU" IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ

# FLORICA T. CÂMPAN

ETAPA JUDEȚEANĂ, 24 MARTIE 2012

## Barem - Clasa a VI-a

**1.** *a) Există numere raționale și neîntregi, notate a, b, c, d, cu proprietatea că* $a-b\in\mathbb{Z}$ *și* $\frac{c}{d}\in\mathbb{Z}$ *?*

*b) Dați exemple de numere x, y, z, t* $\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ *astfel încât* $x+y\in\mathbb{Z}$ *și* $z\cdot t\in\mathbb{Z}$.

*c) Există* $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, *astfel încât* $a+b\in\mathbb{Z}$ *și* $a\cdot b\in\mathbb{Z}$ *?*

*Cristian Lazăr*

**Barem de corectare.**

a) De exemplu, putem alege $a=b=\frac{3}{2}$. ....................2p

De exemplu, putem alege $c=d=\frac{4}{3}$. ....................2p

b) De exemplu, putem alege $x=y=\frac{5}{2}$. ....................2p

De exemplu, $z=1,6; t=2,5$. ....................2p

c) Presupunem că există $a$ și $b$ cu proprietatea din enunț. Fie $a=\frac{m}{n}, b=\frac{p}{q}$, cu $(m,n)=1$, $(p,q)=1$, cu $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. ....................1p

Avem $qn \mid mq+pn$ și $qn \mid mp$, de unde $qn \mid p^2n$, deci $q \mid p^2$, dar $(p,q)=1$. În concluzie, nu există $a$ și $b$ cu proprietate cerută. ....................4p

Baza. ....................2p

**2.** *Ioana pleacă din punctul A spre punctul B iar, mai apoi, își continuă drumul către C și, la final, decide să se întoarcă în A. Punctele A, B, C sunt necoliniare. Se știe că drumurile făcute între două puncte sunt în linie dreaptă și că AB, BC, respectiv, CA au lungimi (în kilometri) exprimate prin numere naturale nenule.*

*a) Dacă AB + BC + CA = 5 km, demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.*

*b) Dacă AB + BC + CA = 6 km, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.*

*c) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care AB + BC + CA = n km și este posibil ca Ioana să parcurgă un drum care nu reprezintă un triunghi isoscel.*

*Cristian Lazăr*

**Barem de corectare.**

a) Nu putem avea toate laturile cu lungimi mai mari sau egale cu 2. ....................1p

Deci măcar o latură are lungimea 1. Nu putem avea două laturi de lungime 1 (folosim inegalitatea trunghiului). Singurul triunghi va fi cu laturile 2, 2, 1. ....................3p

b) Nu putem avea laturi de lungime 1. ....................1p

Deci cea mai mică latură are lungimea 2, de unde triunghiul este echilateral de latură 2. ...............3p
c) Să notăm lungimile laturilor cu $a$, $b$ și $c$. Fără a pierde din generalitate, avem $a < b < c$. ...........1p
Dacă $a = 1$, triunghiul trebuie să fie isoscel. .........................................................................1p
Dacă $a = 2$, putem avea $b = 3$ și $c = 4$ pentru perimetru maxim. .................................................3p
Observație. Se va ține cont de folosirea explicită a inegalității triunghiului.

**3.** *Se ştie că* $A = \overline{aabbcccc}$ *este pătrat perfect şi* $a \neq b \neq c \neq a$.
*a) Arătați că* $121 \mid A$.
*b) Determinați toate numerele A cu proprietatea de mai sus.*

*Cristian Lazăr*

**Barem de corectare.**
a) Se aplică criteriul de divizibilitate cu 11 sau se face efectiv împărțirea cu 11. ............................3p
$11 \mid A$, $A$ este pătrat perfect, 11 este număr prim $\Rightarrow 121 \mid A$. ..........................................................2p
b) Avem $c \in \{0,1,4,5,6,9\}$. Se elimină cazurile $c \in \{1,5,6,9\}$ (cu ajutorul cazurilor $4k + 2$ sau $4k + 3$). ..........................................................................................................................4p
Deci rămâne $c \in \{0,4\}$.
Dacă $c = 4$, atunci $A = M_4$ şi rezultă că $\frac{A}{4} = \overline{.....1111}$, deci $A = 2^2(4k+3)$ şi rezultă că $A$ nu este pătrat perfect.............................................................................................................................2p
Rămâne $c = 0$ și $A = \overline{aabb} \cdot 10^4$, deci e necesar ca $\overline{aabb}$ să fie pătrat perfect. Analizând ca mai sus sau folosind că $121 \mid \overline{aabb}$, obținem că singura variantă este 77440000. ........................................2p
Baza. .............................................................................................................................2p