INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928, FAX: 0235/311715
E-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro, Website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

Olimpiada de matematică în anul şcolar 2011-2012 – faza pe locală
(18.02.2012)

Barem pentru clasa a X-a

1. (7p) Rezolvați ecuația: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{x}=1$.

Prof. Adomniței Constantin, Grupul Școlar "Ion Mincu", Vaslui

Notăm x+1=-2t (2p) și obținem $4^t+6\cdot 36^t-6\cdot 18^t-1=0$ (1p)
$\Rightarrow (2^t-1)(2^t+1)+6\cdot 18^t(2^t-1)=0$ (2p) $\Rightarrow t=1 \Rightarrow x=-1$ soluție unică (2p).

2. a) (MMV, 4p) Arătați că $\lg^2 5+\lg^2 7>\lg 12$.

Folosim $(a-1)^2>0, (\forall) a\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \Rightarrow a^2>2a-1$ (1p).
$\lg^2 5+\lg^2 7>2\lg 5-1+2\lg 7-1=2\lg 3,5=\lg 3,5^2$ (2p), $3,5^2>12 \Leftrightarrow 12,25>12\,(A)$ (1p).

b) (3p) Arătați că $\lg^2 x_1+\lg^2\sqrt{x_2}+...+\lg^2\sqrt[n]{x_n}>3n$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $x_1,x_2,...,x_n>0$ și $x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n=10^{n^2+n}$.

Prof. Alistar Cristian, I.Ș.J. Vaslui

$$\lg^2 x_1+\lg^2\sqrt{x_2}+...+\lg^2\sqrt[n]{x_n}=\frac{\lg^2 x_1}{1^2}+\frac{\lg^2 x_2}{2^2}+...+\frac{\lg^2 x_n}{n^2}\ (1p) \underset{Andriescu}{\overset{Titu}{\geq}} \frac{(\lg x_1+\lg x_2+...+\lg x_n)^2}{1^2+2^2+...+n^2}\ (1p)$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\frac{6n(n+1)}{2n+1}=3n\frac{2n+2}{2n+1}>3n\ \text{(1p)}.$$

3. (G.M., 7p) Considerăm numerele complexe distincte z_1,z_2,z_3 de modulul 1 astfel încât $\frac{z_1z_2}{(z_1-z_2)^2}+\frac{z_2z_3}{(z_2-z_3)^2}+\frac{z_3z_1}{(z_3-z_1)^2}=-1$. Să se demonstreze că z_1,z_2,z_3 sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

$z_k=\cos t_k+i\sin t_k, \overline{k=1,3}, t_k\in[0,2\pi)$ (0,5 p)

Arată că $\dfrac{z_1 z_2}{(z_1-z_2)^2}=-\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{t_1-t_2}{2}}=-\dfrac{1}{|z_1-z_2|^2}$ (2,5 p). Relația din enunț devine

$\dfrac{1}{|z_1-z_2|^2}+\dfrac{1}{|z_2-z_3|^2}+\dfrac{1}{|z_3-z_1|^2}=1$ (0,5 p).

Numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 sunt afixele punctelor A_1, A_2, A_3, iar $\Delta A_1A_2A_3$ este înscris în cercul de centru O(0,0) și rază R=1 (0,5 p).

Notăm

$$c=|z_1-z_2|, a=|z_2-z_3|, c=|z_3-z_1| \Rightarrow 1=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{16S^2}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{16S^2_{\max}}}=1$$

(2p). Deci, S=S $_{\max}$ $\Rightarrow \Delta A_1A_2A_3$ este echilateral (1p).

4. (7p) Determinați funcția f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x+f(x+y))=f(2x)+y$, $(\forall)\, x,y\in\mathbb{R}$.

Luăm x=f(0), y=- f(0)$\Rightarrow$….. $\Rightarrow$f(0)=0 (2p).

Luăm x=0 $\Rightarrow$ $f\circ f=1_{\mathbb{R}}$ (2p) $\Rightarrow$ f este injectivă (1p).

Pentru y=0 $\Rightarrow$ ……$\Rightarrow$f(x)= x (2p).