INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928, FAX: 0235/311715
E-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro, Website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

Olimpiada de matematică în anul şcolar 2011-2012 – faza pe locală
(18.02.2012)

Barem pentru clasa a XI-a

1. (7p) Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 = A+I_n$. Arătați că det(A) > 0.

$\det(I_n + A + A^2) = \det[(A+\frac{1}{2}I_n)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}I_n)^2] \geq 0\ (2p)$

$A^3 = A+I_n \Leftrightarrow A^3 - I_n = A \Leftrightarrow (A-I_n)(A^2+A+I_n) = A \Rightarrow \det(A)\cdot\det(A-I_n)\geq 0$ (2p)

$A^3 = A+I_n \Leftrightarrow A^3 - A = I_n \Leftrightarrow A(A-I_n)(A+I_n) = I_n \Rightarrow \det A(A-I_n)\cdot\det(A+I_n) = 1 \Rightarrow \det(A+I_n)$ >0 (2p). $A^3 = A+I_n \Rightarrow (\det A)^3 = \det(A+I_n)$ >0$\Rightarrow$ det(A)> 0 (1p).

2. (MMV,7p) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \cdot a^{x_n} = n^k, (\forall) n\geq 1; a>1, k\in\mathbb{N}^*$ fixat. Arătați că $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{x_n}$.

$(n+1)^k - n^k = x_{n+1}a^{x_{n+1}} - x_n a^{x_n} = x_{n+1}a^{x_{n+1}} - x_n a^{x_{n+1}} + x_n a^{x_{n+1}} - x_n a^{x_n} = a^{x_{n+1}}(x_{n+1}-x_n) + x_n(a^{x_{n+1}} - a^{x_n})$ (1p). Presupunem prin reducere la absurd că $(\exists) n_0\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x_{n_0+1} - x_{n_0} \leq 0 \Rightarrow$ membrul drept este negativ (fals). Deci, $x_{n+1} - x_n > 0, (\forall) n\geq 1 \Rightarrow$ șirul este strict crescător (2p). Presupunem prin reducere la absurd că șirul este mărginit superior, deci convergent (conform T.W.). Inlocuind în relația de recurență x_n cu limita sa x obținem

$x\cdot a^x = \infty\, (F) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (2p).

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{x_n} = \frac{1}{k}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n^k}{x_n} = \frac{1}{k}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x_n a^{x_n}}{x_n} = \frac{1}{k}\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\ln x_n}{x_n} + \ln a) = \frac{1}{k}(0+\ln a) = \frac{\ln a}{k}$ (2p).

3. (7p) Fie Δ un determinant de ordinul 3 (cu elemente din $\mathbb{R}$) pentru care suma elementelor de pe fiecare linie și coloană este 1, iar elementele de pe diagonala principală sunt $\frac{1}{2}$. Arătați că $\Delta > 0$.

Prof. Adomniței Constantin, Grupul Școlar "Ion Mincu" - Vaslui

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & a & b\\ c & \frac{1}{2} & d\\ e & f & \frac{1}{2}\end{vmatrix}\underset{(1p)}{\overset{c_1+c_2+c_3}{=}}\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & a & 1\\ c & \frac{1}{2} & 1\\ e & f & 1\end{vmatrix}\underset{(1p)}{\overset{l_1+l_2+l_3}{=}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ c & \frac{1}{2} & 1\\ e & f & 1\end{vmatrix}\underset{(1p)}{\overset{\substack{c_2-c_1\\ c_3-3c_2}}{=}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ c & \frac{1}{2}-c & -\frac{1}{2}\\ e & f-e & 1-3f\end{vmatrix}\underset{(1p)}{=}\frac{1}{2}-\frac{3}{2}f-c+3cf+\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}e$$

$\frac{1}{2}+c+e=1, e+f+\frac{1}{2}=1\Rightarrow f=c, e=\frac{1}{2}-c\ (1p)$. După înlocuire se obține

$3c^2-\frac{3}{2}c+\frac{1}{4}=3(c-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{16}>0$ (2p).

4. (GM, 7p) Fie a > 0 și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0>0$ și $x_{n+1}=\frac{x_n^3+ax_n}{1+a}, n\geq 0$. Studiați convergența șirului.

Se arată că $x_n>0,\ (\forall)n\geq 0$ și $x_{n+1}-x_n=\frac{x_n(x_n-1)(x_n+1)}{1+a}, n\geq 0$ (1p). Discuție după x_0:

I. $x_0\in(0;1)$. Se arată prin inducție că $x_n\in(0;1)\ (\forall)n\geq 0$ (1p). Rezultă din ultimele două relații că $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător. Conform T. W. $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent (mai mult șirul are limita 0) (1p).

II. $x_0=1\Rightarrow x_n=1, (\forall)n\geq 0$ (1p).

III. $x_0\in(1;\infty)\Rightarrow x_n\in(1;\infty)\Rightarrow(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător (1p).

Presupunem că șirul este mărginit superior și conform T. W. rezultă că el este convergent. Fie x=$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in[1;\infty)$. $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător $\Rightarrow x\in(1;\infty)$ (1p).

Trecem la limită în relația de recurență și obținem $x=\frac{x^3+ax}{1+a}\Rightarrow x=x^3\Rightarrow x\in\{-1;0;1\}$ care nu convine. Deci, șirul este divergent cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ (1p)