

Olimpiada de matematică în anul școlar 2011-2012 – faza pe locală
(18.02.2012)

Barem pentru clasa a XII-a

1.(7p) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{e^x + \sin x} dx$.

Prof. Adomniței Constantin, Grupul Școlar “Ion Mincu” – Vaslui
Prof. Alistar Cristian, I.Ș.J. Vaslui

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{e^x + \sin x} dx \stackrel{(2p)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}(\sin x - \cos x)}{e^{-x}(e^x + \sin x)} dx \stackrel{(1p)}{=} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x}{1 + e^{-x} \sin x} dx \stackrel{(1p)}{=} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + e^{-x} \sin x)'}{1 + e^{-x} \sin x} dx =$$
$$-\ln(1 + e^{-x} \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(1p)}{=} \ln \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + 1} \quad (1p).$$

2. Fie $0 < a < b$ și $G=(a, b)$ cu legea $x * y = \frac{b(x-a)(y-a) + a(x-b)(y-b)}{(x-a)(y-a) + (x-b)(y-b)}$. Aratăți că:

a) (1p) $(\forall) x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$.

b) (3p) $(G, *)$ este grup abelian.

c) (3p) Determinați funcția $f : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (G, *)$, de forma $f(x) = \frac{mx+n}{px+q}$ știind că este strict crescătoare și că stabilește un morfism de grupuri.

Prof. Alistar Cristian, I.Ș.J. Vaslui

a) Demonstrarea cerinței (1p).

b) Asociativitatea (1p), Comutativitatea (0,5p), Elementul neutru (1p),
Elementele simetrizabile (0,5p).

c) f este continuă și strict crescătoare

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a \Rightarrow \frac{n}{q} = a \Rightarrow n = qa \quad (0,5p) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Rightarrow \frac{m}{p} = b \Rightarrow m = pb \quad (0,5p)$$

$$f(x) = \frac{pbx + qa}{px + q} \quad (0,5 p).$$

$$f \text{ morfism} \Rightarrow f(1) = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{pb+qa}{p+q} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow p=q \quad (1p). \text{ Deci, } f(x) = \frac{bx+a}{x+1} \quad (0,5 p).$$

3. (MMV, 7p) Fie $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot \sin 2x$, iar $h(x) = -f(x) \cdot \cos 2x$. Dacă g și h admit primitive pe \mathbb{R} , arătați că f admite primitive pe \mathbb{R} .

Arată că $f(x) = g(x) \cdot \sin 2x - h(x) \cdot \cos 2x$ (3p)

Fie $G, H, U, V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitivele funcțiilor g, h, u, v unde $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = -2G(x) \cdot \cos 2x$, iar $v(x) = -2H(x) \cdot \sin 2x$ (2p).

Se arată că $f(x) = g(x) \cdot \sin 2x - h(x) \cdot \cos 2x$

$$= [G(x) \cdot \sin 2x]' + U'(x) + [-H(x) \cdot \cos 2x]' + V'(x) = [G(x) \cdot \sin 2x + U(x) - H(x) \cdot \cos 2x + V(x)]' \\ \Rightarrow f \text{ admite primitive (3p).}$$

4. (G.M., 7p) Fie n un număr natural, $n \geq 2$, și (G, \cdot) un grup cu $n^2 - n - 1$ elemente. Știind că funcția $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^n$ este endomorfism al grupului, să se arate că grupul este abelian.

$$f(x) = x^n \text{ este endomorfism} \Rightarrow f(y \cdot x) = f(y) \cdot f(x) \Rightarrow (yx)^n = y^n \cdot x^n, (\forall) x, y \in G \quad (1p)$$

$$\text{Fie } x, y \in G \Rightarrow x^{n^2-n-1} = e \text{ și } y^{n^2-n-1} = e \Rightarrow x^{n^2} = x^{n+1}, y^{n^2} = y^{n+1} \text{ și } (yx)^{n^2-n} = yx \quad (1p)$$

$$\text{Aplicăm condiția de morfism pentru } x^n \in G \text{ și } y^n \in G \Rightarrow (x^n y^n)^n = x^{n^2} y^{n^2} \quad (2p) \Rightarrow$$

$$x^n y^n (x^n y^n)^{n-2} x^n y^n = x^{n+1} y^{n+1} \quad (1p) \Rightarrow y^n (x^n y^n)^{n-2} x^n = x^1 y^1 \Rightarrow (y^n x^n)^{n-1} = xy$$

$$(1p) \Rightarrow (yx)^{n(n-1)} = xy \Rightarrow (yx)^{n^2-n} = xy \Rightarrow yx = xy \Rightarrow G \text{ este grup abelian (1p).}$$