INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928, FAX: 0235/311715
E-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro, Website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

Olimpiada de matematică în anul şcolar 2011-2012 – faza pe locală (18.02.2012)

Barem pentru clasa a XII-a

1.(7p) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{e^x + \sin x} dx$.

Prof. Adomniţei Constantin, Grupul Şcolar "Ion Mincu" – Vaslui
Prof. Alistar Cristian, I.Ş.J. Vaslui

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{e^x + \sin x} dx \overset{(2p)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}(\sin x - \cos x)}{e^{-x}(e^x + \sin x)} dx \overset{(1p)}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x}{1 + e^{-x}\sin x} dx \overset{(1p)}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + e^{-x}\sin x)'}{1 + e^{-x}\sin x} dx \overset{(1p)}{=}$$

$$-\ln(1 + e^{-x}\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{(1p)}{=} \ln \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + 1} \text{ (1p).}$$

2. Fie 0 < a < b şi G=(a , b) cu legea $x * y = \frac{b(x-a)(y-a) + a(x-b)(y-b)}{(x-a)(y-a) + (x-b)(y-b)}$. Arătaţi că:

a) (1p) $(\forall) x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$.

b) (3p) $(G, *)$ este grup abelian.

c) (3p) Determinaţi funcţia $f : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \to (G, *)$, de forma $f(x) = \frac{mx+n}{px+q}$ ştiind că este strict crescătoare şi că stabileşte un morfism de grupuri.

Prof. Alistar Cristian, I.Ş.J. Vaslui

a) Demostrarea cerinţei (1p).
b) Asociativitatea (1p), Comutativitatea (0,5p), Elementul neutru (1p), Elementele simetrizabile (0,5p).
c) f este continuă şi strict crescătoare

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = a \Rightarrow \frac{n}{q} = a \Rightarrow n = qa \quad (0,5p) \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = b \Rightarrow \frac{m}{p} = b \Rightarrow m = pb \quad (0,5p)$$

$f(x)=\frac{pbx+qa}{px+q}$ $(0,5\,p)$.

f morfism $\Rightarrow$ $f(1)=\frac{a+b}{2}\Rightarrow\frac{pb+qa}{p+q}=\frac{a+b}{2}\Rightarrow p=q$ $(1p)$. Deci, $f(x)=\frac{bx+a}{x+1}$ $(0,5\,p)$.

3. (MMV, 7p) Fie $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g(x)=f(x)$\cdot$sin 2x, iar h(x)= - f(x)$\cdot$cos 2x. Dacă g și h admit primitive pe $\mathbb{R}$, arătați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Arată că f(x)=g(x)$\cdot$sin 2x- h(x)$\cdot$cos 2x (3p)

Fie $G,H,U,V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivele funcțiilor g, h, u, v unde $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, u(x)=-2G(x)$\cdot$cos 2x, iar v(x)=- 2H(x)$\cdot$sin2x (2p).

Se arată că f(x)=g(x)$\cdot$sin 2x - h(x)$\cdot$cos2x

$=[G(x)\cdot\sin 2x]'+U'(x)+[-H(x)\cdot\cos 2x]'+V'(x)=[G(x)\cdot\sin 2x+U(x)-H(x)\cdot\cos 2x+V(x)]'$

$\Rightarrow$f admite primitive (3p).

4.(G.M., 7p) Fie n un număr natural, $n\geq 2$, și (G, $\cdot$) un grup cu n^2-n-1 elemente. Știind că funcția f: G$\to$G, $f(x)=x^n$ este endomorfism al grupului, să se arate că grupul este abelian.

$f(x)=x^n$ este endomorfism $\Rightarrow$ f(y$\cdot$x)=f(y)$\cdot$f(x) $\Rightarrow$ $(yx)^n=y^n\cdot x^n,(\forall)\,x,y\in G$ (1p)

Fie x, y$\in$G$\Rightarrow x^{n^2-n-1}=e$ și $y^{n^2-n-1}=e$ $\Rightarrow x^{n^2}=x^{n+1}$, $y^{n^2}=y^{n+1}$ și $(yx)^{n^2-n}=yx$ (1p)

Aplicăm condiția de morfism pentru $x^n\in G$ și $y^n\in G\Rightarrow(x^ny^n)^n=x^{n^2}y^{n^2}$ (2p)$\Rightarrow$

$x^ny^n(x^ny^n)^{n-2}x^ny^n=x^{n+1}y^{n+1}$ (1p) $\Rightarrow y^n(x^ny^n)^{n-2}x^n=x^1y^1\Rightarrow(y^nx^n)^{n-1}=xy$

(1p)$\Rightarrow(yx)^{n(n-1)}=xy\Rightarrow(yx)^{n^2-n}=xy\Rightarrow$yx=xy $\Rightarrow$G este grup abelian (1p).