INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928, FAX: 0235/311715
E-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro, Website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ȘI SPORTULUI

Olimpiada de matematică în anul şcolar 2011-2012 – faza pe locală
(18.02.2012)

Barem pentru clasa a IX-a

1. Fie a,b,c > 0. Arătați că $\frac{4a}{(b+c)^2}+\frac{4b}{(c+a)^2}+\frac{4c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{a+b+c}$.

Se poate aplica inegalitatea C-B-S: $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)$ (1p) cu $a_1=\frac{2\sqrt{a}}{b+c}, b_1=\sqrt{a}, a_1b_1=\frac{2a}{b+c},......$ (1p). Inlocuind obținem

$$\frac{4a}{(b+c)^2}+\frac{4b}{(c+a)^2}+\frac{4c}{(a+b)^2}\geq\frac{\left(\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{c+a}\right)^2}{a+b+c}=4\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{c+a}\right)^2}{a+b+c}.$$

(2p). Se arată că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{c+a}\geq\frac{3}{2}$ (2p). Finalizare (1p).

2.(M.M.V., 7p) Se dă numărul $a=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{99}}$ și se cere să i se găsească partea întreagă ([a]).

Se arată că $\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}, k\in\mathbb{N}^*$ (2p) . Se dau valori lui k, $\overline{k=1,98}$ pentru inegalitatea din stânga (1p), respectiv $\overline{k=2,99}$ pentru inegalitatea din dreapta (1p). Se obține $2(10-\sqrt{2})<a<2(\sqrt{99}-1)$ (1p). Apoi, $17<2(10-\sqrt{2}),\ 2(\sqrt{99}-1)<18$ (1p) $\Rightarrow$[a]=17 (1p).

3. În ΔABC se consideră D$\in$ (BC), E$\in$ (CA), respectiv F$\in$ (AB) asfel încât dreptele AD, BE și CF sunt concurente în centrul cercului înscris în ΔABC . Știind că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ arătați că triunghiul este echilateral.

(AD, (BE, (CF sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ (1p).
$\frac{DB}{DC}=k=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ (2p)

Analog, se obține $\overrightarrow{BE}=\frac{c}{c+a}\overrightarrow{BC}+\frac{a}{c+a}\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CF}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$. Avem:

$$\vec{0}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\left(\frac{b}{b+c}-\frac{a}{c+a}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{c}{b+c}-\frac{a}{a+b}\right)\overrightarrow{AC}+\left(\frac{c}{c+a}-\frac{b}{a+b}\right)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\stackrel{(1p)}{=}$$

$\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{b+c}-1\right)\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari $\Rightarrow$

$\begin{cases}\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}-1 & =0\\ \frac{c}{c+a}+\frac{c}{b+c}-1 & =0\end{cases}$ (2p)$\Rightarrow\begin{cases}b^2=ac\\ c^2=ba\end{cases}$ $\Rightarrow$ a=b=c (1p).

4. (G.M., 7p) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=0$ și $a_{n+1}=a_n+\sqrt{4a_n+1}+1, n\geq 1$.
Să se arate că $\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+...+\sqrt{4a_n+1}=n^2, n\geq 1$.

Calculăm $a_2=2=2^2-2, a_3=6=3^2-3$. Intuim că $a_n=n^2-n, (\forall)n\geq 1$ (1p).
Etapele inducției (3p). Inlocuim

$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+...+\sqrt{4a_n+1}=\sqrt{4(1^2-1)+1}+\sqrt{4(2^2-2)+1}+...+\sqrt{4(n^2-n)+1}=$

$=\sqrt{1^2}+\sqrt{3^2}+...+\sqrt{(2n-1)^2}$ (1p) =1+3+….+(2n-1)=n ^{2} (2p)