

Olimpiada de matematică în anul școlar 2011-2012 – faza pe locală
(18.02.2012)

Barem pentru clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c > 0$. Arătați că $\frac{4a}{(b+c)^2} + \frac{4b}{(c+a)^2} + \frac{4c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Se poate aplica inegalitatea C-B-S: $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$

(1p) cu $a_1 = \frac{2\sqrt{a}}{b+c}, b_1 = \sqrt{a}, a_1b_1 = \frac{2a}{b+c}, \dots$ (1p). Inlocuind obținem

$$\frac{4a}{(b+c)^2} + \frac{4b}{(c+a)^2} + \frac{4c}{(a+b)^2} \geq \frac{\left(\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{c+a}\right)^2}{a+b+c} = 4 \frac{\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{c+a}\right)^2}{a+b+c}$$

(2p). Se arată că $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2}$ (2p). Finalizare (1p).

2. (M.M.V., 7p) Se dă numărul $a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}}$ și se cere să i se găsească partea întreagă ($[a]$).

Se arată că $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}^*$ (2p). Se dau valori lui k ,

$\overline{k=1,98}$ pentru inegalitatea din stânga (1p), respectiv $\overline{k=2,99}$ pentru inegalitatea din dreapta (1p). Se obține $2(10 - \sqrt{2}) < a < 2(\sqrt{99} - 1)$ (1p). Apoi,
 $17 < 2(10 - \sqrt{2}), 2(\sqrt{99} - 1) < 18$ (1p) $\Rightarrow [a] = 17$ (1p).

3. În ΔABC se consideră $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, respectiv $F \in (AB)$ astfel încât dreptele AD , BE și CF sunt concurente în centrul cercului înscris în ΔABC . Știind că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ arătați că triunghiul este echilateral.

(AD , (BE , (CF sunt bisectoarele unghiurilor \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} (1p).

$$\frac{DB}{DC} = k = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+k} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{AC} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC} \quad (2p)$$

Analog, se obține $\overrightarrow{BE} = \frac{c}{c+a} \overrightarrow{BC} + \frac{a}{c+a} \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{CB}$. Avem:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{a}{a+b} \right) \overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b} \right) (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \stackrel{(1p)}{=}$$

$$\left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1 \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{b+c} - 1 \right) \overrightarrow{AC}. \overrightarrow{AB} \text{ și } \overrightarrow{AC} \text{ sunt necoliniari } \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1 = 0 \\ \frac{c}{c+a} + \frac{c}{b+c} - 1 = 0 \end{cases} \quad (2p) \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = ba \end{cases} \Rightarrow a=b=c \quad (1p).$$

4. (G.M., 7p) Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 0$ și $a_{n+1} = a_n + \sqrt{4a_n + 1} + 1, n \geq 1$.

Să se arate că $\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1} = n^2, n \geq 1$.

Calculăm $a_2 = 2 = 2^2 - 2, a_3 = 6 = 3^2 - 3$. Intuim că $a_n = n^2 - n, (\forall) n \geq 1$ (1p).

Etapele inducției (3p). Inlocuim

$$\begin{aligned} \sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1} &= \sqrt{4(1^2 - 1) + 1} + \sqrt{4(2^2 - 2) + 1} + \dots + \sqrt{4(n^2 - n) + 1} = \\ &= \sqrt{1^2} + \sqrt{3^2} + \dots + \sqrt{(2n-1)^2} \quad (1p) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (2p) \end{aligned}$$