**COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI**
*OLIMPIADA DE MATEMATICĂ*
*ETAPA LOCALĂ – 2012*

# ENUNȚURI

## Clasa a V-a

**1.** Determinați numerele naturale *x* şi *y* din egalitatea

$$2^{2012}-2^{2011}-10+\left(16^{20}:8^{26}:4\cdot x-2^{2}\right)(y+3)=2^{2010}+2^{2009}+...+2^{2}+2^{1}+2^{0}.$$

**2.** Se consideră şirul de numere naturale 2, 5, 8, 11, 14, 17, …, *n*.

**a)** Calculați suma primelor o sută de numere din şir.

**b)** Determinați *n*, ştiind că în şirul mai sus sunt exact 100 de numere divizibile cu 10.

**3.** Aflați numărul natural $\overline{abcde}$ care, împărțit la $\overline{cde}$, dă câtul $\overline{ab}+1$ şi restul $\overline{ab}+72$.

**4. a)** Determinați numerele naturale *x* şi *y* pentru care $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x+57=y^{2}$.

**b)** Dacă numărul $2^{2012}$ are *a* cifre şi numărul $5^{2012}$ are *b* cifre, determinați *a* + *b*.

*Subiect elaborat de Alice Anița*

## Clasa a VI-a

**1. a)** Determinați numerele prime *a*, *b* şi *c*, ştiind că *a* + *b* – *c* = 6 şi *b* + *c* = 78.

**b)** Aflați cel mai mic număr natural de forma $A=2^{a}\cdot 3^{b}$, unde $a,b\in\mathbb{N}$, cu proprietatea că numărul divizorilor lui *A* este cu 10 mai mic decât numărul divizorilor lui 9*A*.

**2. a)** Determinați numerele naturale *n* pentru care fracția $\dfrac{2^{n}\cdot 3^{n+1}+5}{2^{n+1}\cdot 3^{n}+4}$ este reductibilă.

**b)** Arătați că $\dfrac{1}{3^{2}}+\dfrac{1}{5^{2}}+\dfrac{1}{7^{2}}...+\dfrac{1}{2013^{2}}<\dfrac{1}{4}$.

**3.** Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi obtuzunghic *ABC*, exprimate în grade, ştiind că $m(\sphericalangle A)=4x+3y$, $m(\sphericalangle B)=x+82$, $m(\sphericalangle C)=y-12$ şi $x,y\in\mathbb{N}$.

**4.** Triunghiul *ABC* are *AB* = *AC* < *BC*. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează *AC* în E, perpendiculara din *C* pe *BE* intersectează *AB* în *P*, iar *PE* intersectează *BC* în *S*.

**a)** Arătați că *PS* = *SB*.

**b)** Arătați că triunghiul *APE* are perimetrul egal cu lungimea laturii *BC*.

*Subiect elaborat de Ioana Cătălina Anton*

## Clasa a VII-a

**1. a)** Fie suma $S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + .. + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Aflați numărul natural $n$ pentru care $S = 2012$.

**b)** Dacă $n \in \mathbb{N}$, comparați numerele $A$ și $B$, unde:

$$A = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{4}+\sqrt{3})...(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})$$
$$B = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{4}-\sqrt{3})...(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}).$$

**2.** Se consideră mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n^2+n+2}{n^2-n+2}, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 50 \right\}$ și

$B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \mid y = \frac{p-2}{p+1}, p \in \mathbb{N}, 1 \le p \le 49 \right\}$. Arătați că $A$ și $B$ au același cardinal.

**3.** Fie $AE$ înălțimea din $A$ a triunghiului $ABC$, cu $E \in (BC)$. Pe perpendicularele duse pe $BC$ în $B$ și $C$ considerăm punctele $N$, respectiv $M$, de aceeași parte a lui $BC$ ca și $A$, astfel încât $NC \cap BM \cap AE = \{F\}$. Demonstrați că $BN + MC \ge 4EF$.

**4.** Trapezul isoscel $ABCD$ are diagonalele perpendiculare. Paralela la baze dusă prin punctul de intersecție a diagonalelor intersectează laturile neparalele $BC$ și $AD$ în punctele $P$, respectiv $R$. Fie punctul $Q \in (BC)$ astfel încât $BQ = CP$. Demonstrați că:

**a)** $QR = AD$; **b)** $QR \perp AD$.

*Claudiu-Ştefan Popa, Recreații Matematice 1/2012*

*Subiect elaborat de Sergiu Prisacariu*

## Clasa a VIII-a

**1.** Determinați numerele reale $x \in [-1, 0]$ și $y \in [1, 2]$ pentru care

$$4x^2 + y^2 + 16 \le 4xy - 16x + 8y.$$

**2.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ având ca bază inferioară pătratul $ABCD$ de centru $O$ și latură $AB = 4$ cm. Știind că măsura unghiului dintre dreptele $BC$ și $D'O$ este de $60^\circ$, calculați distanțele de la punctele $A$, respectiv $A'$, până la dreapta $D'O$.

**3.** Fie $ABCD$ un dreptunghi. Pe planul acestuia, de aceeași parte, ducem perpendicularele $AM$, $BN$, $CP$ și $DQ$ astfel încât punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$ să fie coplanare. Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi dacă și numai dacă una dintre laturile sale este paralelă cu planul $(ABC)$.

*Gabriel Popa, Gazeta Matematică 1/2011*

**4.** Stabiliți câte submulțimi $\{a, b\}$ ale mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ au proprietatea că $a^3 + b^3$ se divide cu 12.

*Dorel Luchian, Recreații Matematice 1/2012*

*Subiect elaborat de Gabriel Popa*

## Clasa a IX-a

**1.** Dacă $x$ şi $y$ sunt numere reale, definim $x*y=\{x+y\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real $a$.

**a)** Demonstrați că $x*(y*z)=(x*y)*z, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

**b)** Rezolvați ecuația $x*x*x=\frac{1}{2}$, unde $x\in[0,1)$.

**2.** Se consideră şirurile $x_n=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2n}, y_n=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n}, n\in\mathbb{N}^*$.

**a)** Demonstrați că $x_n=A_n+B_n\sqrt{6}, y_n=A_n-B_n\sqrt{6}$, unde $A_n, B_n\in\mathbb{N}^*$.

**b)** Arătați că $y_{2n}<\frac{1}{10^n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**c)** Determinați primele *n* zecimale ale lui $x_{2n}, n\in\mathbb{N}^*$.

**3.** Fie triunghiul $ABC$ cu laturile de lungimi $a$, $b$, $c$ şi triunghiul $A'B'C'$ definit de $\overrightarrow{BA'}=a\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB'}=b\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC'}=c\overrightarrow{AB}$. Dacă $\Delta ABC$ şi $\Delta A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate, arătați că triunghiul $ABC$ este echilateral.

**4.** Se consideră patrulaterul convex $ABCD$; notăm cu $H_1$ ortocentrul $\Delta BCD$ şi cu $H_2$ ortocentrul $\Delta ACD$. Ştiind că $H_1H_2AB$ este paralelogram, demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

*Subiect elaborat de Valentina Blendea*

.

**COLEGIUL NAȚIONAL IAŞI**
*OLIMPIADA DE MATEMATICĂ*
*ETAPA LOCALĂ - 2012*

# SOLUȚII

## Clasa a V-a

**1.** Deoarece $2^{2012}-2^{2011}-10$ = $2^{2011}-10$, $2^{2010}+2^{2009}+...+2^2+2^1+2^0=2^{2011}-1$ şi $16^{20}$: $8^{26}$: 4 = 1, relația din enunț revine la $(x-4)(y+3)=9$, de unde $x=5, y=6$ sau $x=7, y=0$.

**2. a)** Numărul de pe locul 100 este $2+99\cdot 3=299$, deci suma primilor 100 de termeni ai şirului este $(2+299)\cdot 100:2=15050$.

**b)** Numerele din şir divizibile cu 10 sunt 20, 50, 80, deci cele de forma $30k-10$. Al 100-lea astfel de număr este $30\cdot 100-10=2990$. Rezultă că numărul *n* poate fi 2990, 2993, 2996, …., 3017.

**3.** Din teorema împărțirii cu rest, avem că $\overline{abcde}=\overline{cde}\cdot(\overline{ab}+1)+\overline{ab}+72$, cu $\overline{cde}>\overline{ab}+72$. Deducem că $\overline{ab}\cdot(999-\overline{cde})=72$, de unde

$$\overline{abcde}\in\{72998, 36997, 24996, 18995, 12993\}.$$

**4. a)** Dacă $x\geq 5$, atunci $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x=\overline{...0}$, iar $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x+57=\overline{...7}\neq y^2$. Rămâne că $x\in\{1,2,3,4\}$ şi, cercetând fiecare caz în parte, observăm că singura situație favorabilă este $x=4, y=9$.

**b)** Dacă $2^{2012}$ are *a* cifre, atunci $10^{a-1}<2^{2012}<10^a$ (evident, inegalitățile sunt stricte!). Apoi, dacă $5^{2012}$ are *b* cifre, rezultă că $10^{b-1}<5^{2012}<10^b$ (din nou, inegalități stricte). Prin înmulțire, $10^{a+b-2}<10^{2012}<10^{a+b}$. Obținem astfel că $a+b-2<2012$ şi $a+b>2012$, prin urmare $a+b=2013$.

## Clasa a VI-a

**1. a)** Prin adunarea celor două egalități se obține că *a* + 2*b* = 84, de unde deducem că *a* este număr par; dar *a* este prim, deci *a* = 2. Rezultă apoi că *b* = 41, *c* = 37.

**b)** Ipoteză problemei arată că (*a* + 1)(*b* + 1) = (*a* + 1)(*b* + 3) – 10, de unde 2(*a* + 1) = = 10, deci *a* = 4. Cel mai mic număr *A* se obține pentru *a* = 4, *b* = 0 şi este *A* = 16.

**2. a)** Pentru ca fracția să fie reductibilă, trebuie să existe un număr natural *d* > 1 astfel încât $d\,|\,2^n\cdot 3^{n+1}+5$ şi $d\,|\,2^{n+1}\cdot 3^n+4$. Atunci $d\,|\,3(2^{n+1}\cdot 3^n+4)-2(2^n\cdot 3^{n+1}+5)$, adică $d\,|\,2$ şi, cum $d > 1$, obținem că $d = 2$. Pentru ca 2 să dividă numărătorul, acesta trebuie să fie par, prin urmare $n = 0$.

**b)** Observăm că $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)(k+1)}$, de unde $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \ldots +$
$+ \frac{1}{2012 \cdot 2014} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2014}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2014}\right) = \frac{503}{2014} < \frac{1}{4}$.

**3.** Folosind teorema care dă suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, obținem că $5x + 4y =$ $= 110$. Atunci $5 | y$ şi este evident că $y > 12$ (pentru că măsura unghiului $\sphericalangle C$ este număr natural) şi că $y < 22$ (deoarece $4y < 110$). Rezultă că $y \in \{15, 20\}$; analizând cele două situații şi ținând seama că triunghiul dat este obtuzunghic, obținem că singura soluție este $y = 15,\ x = 10$, când $m(\sphericalangle A) = 85^o,\ m(\sphericalangle B) = 92^o,\ m(\sphericalangle C) = 3^o$.

**4. a)** Cum $BE$ este bisectoare şi înălțime în triunghiul $BCP$, deducem că $\Delta BPC$ este isoscel, deci $BP = BC$. Atunci $\Delta BPE \equiv \Delta BCE$ $(L.U.L.)$, de unde obținem că $\sphericalangle BPS \equiv \sphericalangle BCA$. Însă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCA$ (deoarece triunghiul $ABC$ este isoscel), prin urmare $\sphericalangle BPS \equiv \sphericalangle PBS$. Rezultă că $\Delta BPS$ este isoscel, de unde concluzia.

**b)** Din $\Delta BPE \equiv \Delta BCE$ deducem că $PE = CE$, deci

$$P_{\Delta APE} = AP + PE + AE = AP + CE + AE = AP + AC = AP + AB = BP = BC.$$

## Clasa a VII-a

**1. a)** După raționalizări şi reducerea termenilor asemenea, obținem că $S = \sqrt{n+1} - 1$. Cum $S = 2012$, deducem că $n = 2013^2 - 1$.

**b)** Folosind formula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, rezultă că $A \cdot B = 1$. Pe de altă parte,

$$B = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}},$$

aşadar $B > 1$. În aceste condiții, $A < 1$ şi atunci $A < B$.

**2.** Observăm că $\frac{p_1 - 2}{p_1 + 1} = \frac{p_2 - 2}{p_2 + 1} \Leftrightarrow p_1 = p_2$, prin urmare valori distincte ale lui $p$ conduc la valori distincte ale fracțiilor $\frac{p-2}{p+1}$. Cum $p$ poate lua 49 de valori, rezultă că mulțimea $B$ are 49 de elemente. Dacă presupunem că $\frac{n_1^2 + n_1 + 2}{n_1^2 - n_1 + 2} = \frac{n_2^2 + n_2 + 2}{n_2^2 - n_2 + 2}$ obținem, după calcule, că $(n_1 n_2 - 2)(n_1 - n_2) = 0$. Rezultă că numai $n_1 = 1$ şi $n_2 = 2$ conduc la o aceeaşi valoare a fracției $\frac{n^2+n+2}{n^2-n+2}$. Întrucât $n$ poate lua 50 de valori, deducem că vom avea 49 fracții distincte de forma $\frac{n^2+n+2}{n^2-n+2}$, adică $A$ are tot 49 de elemente şi de aici urmează concluzia problemei.

**3.** Folosind teorema fundamentală a asemănării, din $EF || BN$ şi $EF || MC$ obținem că $\frac{BN}{FE} = \frac{BC}{CE}$, respectiv $\frac{MC}{FE} = \frac{BC}{BE}$. Astfel, $\frac{BN}{FE} + \frac{MC}{FE} = \frac{BC}{CE} + \frac{BC}{BE}$, de unde $BN + MC =$ $= FE \cdot \left(2 + \frac{BE}{CE} + \frac{CE}{BE}\right)$. Însă $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $\forall a, b > 0$, prin urmare $BN + MC \geq 4EF$.

**4. a)** Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi $M$ mijlocul segmentului $BC$. Atunci $OM$ este linie mijlocie în $\Delta PQR$, deci $OM = \frac{1}{2} RQ$ şi $OM || RQ$. Pe de altă parte, $OM$ este mediană a ipotenuzei în $\Delta BOC$ dreptunghic, aşadar $OM = \frac{1}{2} BC$. Deducem astfel că $RQ = BC = AD$.

**b)** Dacă $\{T\} = MO \cap AD$, atunci $\sphericalangle MBO \equiv \sphericalangle MOB \equiv \sphericalangle DOT$. Însă $\sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle TDO$, prin urmare $m(\sphericalangle OTD) = m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$. Rezultă că $MT \perp AD$ şi, cum $MT || RQ$, obținem că $RQ \perp AD$.

## Clasa a VIII-a

**1.** Relația din enunț revine la $(2x - y + 4)^2 \leq 0$, de unde rezultă că $y = 2x + 4$. Însă $y \in [1, 2]$ şi $2x + 4 \in [2, 4]$, prin urmare $y = 2$, $x = -1$.

**2.** Deoarece $D'O$ este mediană în triunghiul isoscel $D'AC$, avem că $D'O \perp AC$, prin urmare $d(A, D'O) = AO = 2\sqrt{2}$ cm.

Cum măsura unghiului dintre dreptele $BC$ şi $D'O$ este de $60^\circ$, rezultă că măsura unghiului $A'D'O$ este de $60^\circ$. Atunci triunghiul isoscel $A'D'O$ este chiar echilateral, iar distanța de la punctul $A'$ la dreapta $D'O$ este înălțimea acestui triunghi, cu lungimea de $2\sqrt{3}$ cm.

**3.** Din $(BCP) || (ADQ), (BCP) \cap (MNP) = NP$ şi $(ADQ) \cap (MNP) = MQ$, rezultă că $NP || MQ$. Analog se arată că $MN || PQ$, prin urmare $MNPQ$ este paralelogram.

Dacă $NP || (ABC)$, atunci $NP || BC$ şi, cum $BC \perp (ABN)$, deducem că $NP \perp (ABN)$ adică $NP \perp MN$ şi astfel $MNPQ$ este dreptunghi.

Reciproc, dacă $MNPQ$ este dreptunghi şi $MN \nparallel AB$, avem că $NP$ este perpendiculară pe dreptele concurente $MN$ (deoarece $MNPQ$ este dreptunghi) şi $AB$ (fiindcă $AB \perp (BCP)$). Rezultă că $NP \perp (ABN)$ şi, întrucât $BC \perp (ABN)$, obținem că $NP || BC$.

**4.** Dacă $a \equiv r \pmod{12}$ şi $a^3 \equiv r' \pmod{12}$, între resturile $r$ şi $r'$ există următoarea corespondență:

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r'$ | 0 | 1 | 8 | 3 | 4 | 5 | 0 | 7 | 8 | 9 | 4 | 11 |

Fie $r_1$ şi $r_2$ resturile modulo 12 ale numerelor *a*, respectiv *b* cu proprietatea că $a^3+b^3 \vdots 12$; presupunând că $r_1 \le r_2$, vom avea că

$$(r_1,r_2)\in\{(0,0),(0,6),(6,6),(1,11),(2,4),(2,10),(4,8),(8,10),(3,9),(5,7)\}.$$

Cum *A* conține 8 multipli de 12, există $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ de submulțimi $\{a,b\}$ corespunză-toare situației $(r_1,r_2)=(0,0)$. Apoi, vom avea $8\cdot 8=64$ submulțimi $\{a,b\}$ corespunză-toare situației $(r_1,r_2)=(0,6)$, $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ submulțimi când $(r_1,r_2)=(6,6)$, $9\cdot 8=72$ submulțimi dacă $(r_1,r_2)=(1,11)$ etc.

În total, obținem $28+64+28+72+81+72+72+64+72+64=617$ submulțimi cu proprietatea din enunț.

## Clasa a IX-a

**1. a)** Dacă notăm $y*z=t$, atunci $x*t=\{x+t\}=x+t-[x+t]=x+\{y+z\}-[x+\{y+z\}]$ $=x+(y+z-[y+z])-[x+(y+z-[y+z])]=x+y+z-[x+y+z]=\{x+y+z\}$ (am folosit faptul că $[y+z]$ este număr întreg, deci iese în afara părții întregi). Analog se procedează pentru membrul drept şi astfel rezultă identitatea cerută.

**b)** Avem că $x*x*x=\{3x\}=\frac{1}{2}$. Întrucât $x\in[0,1)$, rezultă că $[3x]\in\{0,1,2\}$. Atunci $3x\in\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right\}$, prin urmare $x\in\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right\}$.

**2. a)** Se foloseşte metoda inducției matematice.

**b)** Ar fi suficient să arătăm că $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2<\frac{1}{10}$, fapt care se dovedeşte cu uşurință.

**c)** Observăm că $x_{2n}=2A_{2n}-y_{2n}$. Conform b), numărul $y_{2n}$ are primele *n* zecimale 0, de unde rezultă că $x_{2n}$ are primele *n* zecimale 9.

**3.** Dacă $\Delta ABC$ şi $\Delta A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate, atunci $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$. Deducem că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\vec{0}$, de unde, folosind ipoteza, obținem că $a\overrightarrow{BC}+b\overrightarrow{CA}+c\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, adică $(c-a)\overrightarrow{AB}+(a-b)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ fiind necoliniari, rezultă că $a=b=c$.

**4.** Fie $O_1$ centrul cercului circumscris triunghiului *BCD* şi $O_2$ centrul cercului circumscris triunghiului *ACD*. Identitatea lui Sylvester arată că $\overrightarrow{O_1H_1}=\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1D}$ şi $\overrightarrow{O_2H_2}=\overrightarrow{O_2A}+\overrightarrow{O_2C}+\overrightarrow{O_2D}$. Scăzând membru cu membru aceste relații, obținem că $\overrightarrow{O_1H_1}-\overrightarrow{O_1B}=\overrightarrow{O_2H_2}-\overrightarrow{O_2A}+2\overrightarrow{O_1O_2}$. Însă $\overrightarrow{O_1H_1}-\overrightarrow{O_1B}=\overrightarrow{BH_1}=\overrightarrow{AH_2}=\overrightarrow{O_2H_2}-\overrightarrow{O_2A}$, deoarece $H_1H_2AB$ este paralelogram. Rezultă că $\overrightarrow{O_1O_2}=\vec{0}$, deci patrulaterul *ABCD* este inscriptibil.