



## ENUNȚURI

### Clasa a V-a

1. Determinați numerele naturale  $x$  și  $y$  din egalitatea

$$2^{2012} - 2^{2011} - 10 + (16^{20} : 8^{26} : 4 \cdot x - 2^2)(y + 3) = 2^{2010} + 2^{2009} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

2. Se consideră șirul de numere naturale 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...,  $n$ .

a) Calculați suma primelor o sută de numere din șir.

b) Determinați  $n$ , știind că în șirul mai sus sunt exact 100 de numere divizibile cu 10.

3. Aflați numărul natural  $\overline{abcde}$  care, împărțit la  $\overline{cde}$ , dă câtul  $\overline{ab} + 1$  și restul  $\overline{ab} + 72$ .

4. a) Determinați numerele naturale  $x$  și  $y$  pentru care  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x + 57 = y^2$ .

b) Dacă numărul  $2^{2012}$  are  $a$  cifre și numărul  $5^{2012}$  are  $b$  cifre, determinați  $a + b$ .

*Subiect elaborat de Alice Anița*

### Clasa a VI-a

1. a) Determinați numerele prime  $a$ ,  $b$  și  $c$ , știind că  $a + b - c = 6$  și  $b + c = 78$ .

b) Aflați cel mai mic număr natural de forma  $A = 2^a \cdot 3^b$ , unde  $a, b \in \mathbb{N}$ , cu proprietatea că numărul divizorilor lui  $A$  este cu 10 mai mic decât numărul divizorilor lui  $9A$ .

2. a) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care fracția  $\frac{2^n \cdot 3^{n+1} + 5}{2^{n+1} \cdot 3^n + 4}$  este reductibilă.

b) Arătați că  $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}$ .

3. Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi obtuzunghic  $ABC$ , exprimate în grade, știind că  $m(\sphericalangle A) = 4x + 3y$ ,  $m(\sphericalangle B) = x + 82$ ,  $m(\sphericalangle C) = y - 12$  și  $x, y \in \mathbb{N}$ .

4. Triunghiul  $ABC$  are  $AB = AC < BC$ . Bisectoarea unghiului  $\sphericalangle ABC$  intersectează  $AC$  în  $E$ , perpendiculara din  $C$  pe  $BE$  intersectează  $AB$  în  $P$ , iar  $PE$  intersectează  $BC$  în  $S$ .

a) Arătați că  $PS = SB$ .

b) Arătați că triunghiul  $APE$  are perimetrul egal cu lungimea laturii  $BC$ .

*Subiect elaborat de Ioana Cătălina Anton*

### Clasa a VII-a

1. a) Fie suma  $S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ . Aflați numărul natural  $n$  pentru care  $S = 2012$ .

b) Dacă  $n \in \mathbb{N}$ , comparați numerele  $A$  și  $B$ , unde:

$$A = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})$$
$$B = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{4} - \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}).$$

2. Se consideră mulțimile  $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 2}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 50 \right\}$  și

$$B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \mid y = \frac{p-2}{p+1}, p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq 49 \right\}. \text{ Arătați că } A \text{ și } B \text{ au același cardinal.}$$

3. Fie  $AE$  înălțimea din  $A$  a triunghiului  $ABC$ , cu  $E \in (BC)$ . Pe perpendicularele duse pe  $BC$  în  $B$  și  $C$  considerăm punctele  $N$ , respectiv  $M$ , de aceeași parte a lui  $BC$  ca și  $A$ , astfel încât  $NC \cap BM \cap AE = \{F\}$ . Demonstrați că  $BN + MC \geq 4EF$ .

4. Trapezul isoscel  $ABCD$  are diagonalele perpendiculare. Paralela la baze dusă prin punctul de intersecție a diagonalelor intersectează laturile neparalele  $BC$  și  $AD$  în punctele  $P$ , respectiv  $R$ . Fie punctul  $Q \in (BC)$  astfel încât  $BQ = CP$ . Demonstrați că:

a)  $QR = AD$ ;

b)  $QR \perp AD$ .

*Claudiu-Ștefan Popa, Recreații Matematice 1/2012*

*Subiect elaborat de Sergiu Prisacariu*

### Clasa a VIII-a

1. Determinați numerele reale  $x \in [-1, 0]$  și  $y \in [1, 2]$  pentru care

$$4x^2 + y^2 + 16 \leq 4xy - 16x + 8y.$$

2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  având ca bază inferioară pătratul  $ABCD$  de centru  $O$  și latură  $AB = 4$  cm. Știind că măsura unghiului dintre dreptele  $BC$  și  $D'O$  este de  $60^\circ$ , calculați distanțele de la punctele  $A$ , respectiv  $A'$ , până la dreapta  $D'O$ .

3. Fie  $ABCD$  un dreptunghi. Pe planul acestuia, de aceeași parte, ducem perpendicularele  $AM$ ,  $BN$ ,  $CP$  și  $DQ$  astfel încât punctele  $M$ ,  $N$ ,  $P$  și  $Q$  să fie coplanare. Demonstrați că patrulaterul  $MNPQ$  este dreptunghi dacă și numai dacă una dintre laturile sale este paralelă cu planul  $(ABC)$ .

*Gabriel Popa, Gazeta Matematică 1/2011*

4. Stabiliți câte submulțimi  $\{a, b\}$  ale mulțimii  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  au proprietatea că  $a^3 + b^3$  se divide cu 12.

*Dorel Luchian, Recreații Matematice 1/2012*

*Subiect elaborat de Gabriel Popa*

## Clasa a IX-a

1. Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere reale, definim  $x * y = \{x + y\}$ , unde  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $a$ .

a) Demonstrați că  $x * (y * z) = (x * y) * z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

b) Rezolvați ecuația  $x * x * x = \frac{1}{2}$ , unde  $x \in [0, 1)$ .

2. Se consideră șirurile  $x_n = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2n}, y_n = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n}, n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Demonstrați că  $x_n = A_n + B_n \sqrt{6}, y_n = A_n - B_n \sqrt{6}$ , unde  $A_n, B_n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Arătați că  $y_{2n} < \frac{1}{10^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

c) Determinați primele  $n$  zecimale ale lui  $x_{2n}, n \in \mathbb{N}^*$ .

3. Fie triunghiul  $ABC$  cu laturile de lungimi  $a, b, c$  și triunghiul  $A'B'C'$  definit de  $\overline{BA'} = a\overline{BC}, \overline{CB'} = b\overline{CA}, \overline{AC'} = c\overline{AB}$ . Dacă  $\Delta ABC$  și  $\Delta A'B'C'$  au același centru de greutate, arătați că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

4. Se consideră patrulaterul convex  $ABCD$ ; notăm cu  $H_1$  ortocentrul  $\Delta BCD$  și cu  $H_2$  ortocentrul  $\Delta ACD$ . Știind că  $H_1 H_2 AB$  este paralelogram, demonstrați că patrulaterul  $ABCD$  este inscriptibil.

*Subiect elaborat de Valentina Blendea*



## SOLUȚII

### Clasa a V-a

1. Deoarece  $2^{2012} - 2^{2011} - 10 = 2^{2011} - 10$ ,  $2^{2010} + 2^{2009} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^{2011} - 1$  și  $16^{20} : 8^{26} : 4 = 1$ , relația din enunț revine la  $(x-4)(y+3) = 9$ , de unde  $x = 5, y = 6$  sau  $x = 7, y = 0$ .

2. a) Numărul de pe locul 100 este  $2 + 99 \cdot 3 = 299$ , deci suma primilor 100 de termeni ai șirului este  $(2 + 299) \cdot 100 : 2 = 15050$ .

b) Numerele din șir divizibile cu 10 sunt 20, 50, 80, deci cele de forma  $30k - 10$ . Al 100-lea astfel de număr este  $30 \cdot 100 - 10 = 2990$ . Rezultă că numărul  $n$  poate fi 2990, 2993, 2996, ..., 3017.

3. Din teorema împărțirii cu rest, avem că  $\overline{abcde} = \overline{cde} \cdot (\overline{ab} + 1) + \overline{ab} + 72$ , cu  $\overline{cde} > \overline{ab} + 72$ . Deducem că  $\overline{ab} \cdot (999 - \overline{cde}) = 72$ , de unde

$$\overline{abcde} \in \{72998, 36997, 24996, 18995, 12993\}.$$

4. a) Dacă  $x \geq 5$ , atunci  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x = \dots 0$ , iar  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x + 57 = \dots 7 \neq y^2$ . Rămâne că  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$  și, cercetând fiecare caz în parte, observăm că singura situație favorabilă este  $x = 4, y = 9$ .

b) Dacă  $2^{2012}$  are  $a$  cifre, atunci  $10^{a-1} < 2^{2012} < 10^a$  (evident, inegalitățile sunt stricte!). Apoi, dacă  $5^{2012}$  are  $b$  cifre, rezultă că  $10^{b-1} < 5^{2012} < 10^b$  (din nou, inegalități stricte). Prin înmulțire,  $10^{a+b-2} < 10^{2012} < 10^{a+b}$ . Obținem astfel că  $a+b-2 < 2012$  și  $a+b > 2012$ , prin urmare  $a+b = 2013$ .

### Clasa a VI-a

1. a) Prin adunarea celor două egalități se obține că  $a + 2b = 84$ , de unde deducem că  $a$  este număr par; dar  $a$  este prim, deci  $a = 2$ . Rezultă apoi că  $b = 41, c = 37$ .

b) Ipoteză problemei arată că  $(a+1)(b+1) = (a+1)(b+3) - 10$ , de unde  $2(a+1) = 10$ , deci  $a = 4$ . Cel mai mic număr  $A$  se obține pentru  $a = 4, b = 0$  și este  $A = 16$ .

2. a) Pentru ca fracția să fie reductibilă, trebuie să existe un număr natural  $d > 1$  astfel încât  $d | 2^n \cdot 3^{n+1} + 5$  și  $d | 2^{n+1} \cdot 3^n + 4$ . Atunci  $d | 3(2^{n+1} \cdot 3^n + 4) - 2(2^n \cdot 3^{n+1} + 5)$ , adică  $d | 2$  și,

cum  $d > 1$ , obținem că  $d = 2$ . Pentru ca 2 să dividă numărătorul, acesta trebuie să fie par, prin urmare  $n = 0$ .

**b)** Observăm că  $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)(k+1)}$ , de unde  $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2014} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2014} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2014} \right) = \frac{503}{2014} < \frac{1}{4}$ .

**3.** Folosind teorema care dă suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, obținem că  $5x + 4y = 110$ . Atunci  $5 \mid y$  și este evident că  $y > 12$  (pentru că măsura unghiului  $\sphericalangle C$  este număr natural) și că  $y < 22$  (deoarece  $4y < 110$ ). Rezultă că  $y \in \{15, 20\}$ ; analizând cele două situații și ținând seama că triunghiul dat este obtuzunghic, obținem că singura soluție este  $y = 15, x = 10$ , când  $m(\sphericalangle A) = 85^\circ, m(\sphericalangle B) = 92^\circ, m(\sphericalangle C) = 3^\circ$ .

**4. a)** Cum  $BE$  este bisectoare și înălțime în triunghiul  $BCP$ , deducem că  $\triangle BPC$  este isoscel, deci  $BP = BC$ . Atunci  $\triangle BPE \equiv \triangle BCE$  ( $LU.L.$ ), de unde obținem că  $\sphericalangle BPS \equiv \sphericalangle BCA$ . Însă  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCA$  (deoarece triunghiul  $ABC$  este isoscel), prin urmare  $\sphericalangle BPS \equiv \sphericalangle PBS$ . Rezultă că  $\triangle BPS$  este isoscel, de unde concluzia.

**b)** Din  $\triangle BPE \equiv \triangle BCE$  deducem că  $PE = CE$ , deci

$$P_{\triangle APE} = AP + PE + AE = AP + CE + AE = AP + AC = AP + AB = BP = BC.$$

### Clasa a VII-a

**1. a)** După raționalizări și reducerea termenilor asemenea, obținem că  $S = \sqrt{n+1} - 1$ . Cum  $S = 2012$ , deducem că  $n = 2013^2 - 1$ .

**b)** Folosind formula  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ , rezultă că  $A \cdot B = 1$ . Pe de altă parte,

$$B = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{4}}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}},$$

așadar  $B > 1$ . În aceste condiții,  $A < 1$  și atunci  $A < B$ .

**2.** Observăm că  $\frac{p_1 - 2}{p_1 + 1} = \frac{p_2 - 2}{p_2 + 1} \Leftrightarrow p_1 = p_2$ , prin urmare valori distincte ale lui  $p$  conduc la

valori distincte ale fracțiilor  $\frac{p-2}{p+1}$ . Cum  $p$  poate lua 49 de valori, rezultă că mulțimea  $B$  are

49 de elemente. Dacă presupunem că  $\frac{n_1^2 + n_1 + 2}{n_1^2 - n_1 + 2} = \frac{n_2^2 + n_2 + 2}{n_2^2 - n_2 + 2}$  obținem, după calcule, că

$(n_1 n_2 - 2)(n_1 - n_2) = 0$ . Rezultă că numai  $n_1 = 1$  și  $n_2 = 2$  conduc la o aceeași valoare a

fracției  $\frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 2}$ . Întrucât  $n$  poate lua 50 de valori, deducem că vom avea 49 fracții

distincte de forma  $\frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 2}$ , adică  $A$  are tot 49 de elemente și de aici urmează concluzia problemei.

3. Folosind teorema fundamentală a asemănării, din  $EF \parallel BN$  și  $EF \parallel MC$  obținem că  $\frac{BN}{FE} = \frac{BC}{CE}$ , respectiv  $\frac{MC}{FE} = \frac{BC}{BE}$ . Astfel,  $\frac{BN}{FE} + \frac{MC}{FE} = \frac{BC}{CE} + \frac{BC}{BE}$ , de unde  $BN + MC = FE \cdot \left(2 + \frac{BE}{CE} + \frac{CE}{BE}\right)$ . Însă  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0$ , prin urmare  $BN + MC \geq 4EF$ .

4. a) Fie  $\{O\} = AC \cap BD$  și  $M$  mijlocul segmentului  $BC$ . Atunci  $OM$  este linie mijlocie în  $\Delta PQR$ , deci  $OM = \frac{1}{2}RQ$  și  $OM \parallel RQ$ . Pe de altă parte,  $OM$  este mediană a ipotenuzei în  $\Delta BOC$  dreptunghic, așadar  $OM = \frac{1}{2}BC$ . Deducem astfel că  $RQ = BC = AD$ .

b) Dacă  $\{T\} = MO \cap AD$ , atunci  $\sphericalangle MBO \equiv \sphericalangle MOB \equiv \sphericalangle DOT$ . Însă  $\sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle TDO$ , prin urmare  $m(\sphericalangle OTD) = m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$ . Rezultă că  $MT \perp AD$  și, cum  $MT \parallel RQ$ , obținem că  $RQ \perp AD$ .

### Clasa a VIII-a

1. Relația din enunț revine la  $(2x - y + 4)^2 \leq 0$ , de unde rezultă că  $y = 2x + 4$ . Însă  $y \in [1, 2]$  și  $2x + 4 \in [2, 4]$ , prin urmare  $y = 2, x = -1$ .

2. Deoarece  $D'O$  este mediană în triunghiul isoscel  $D'AC$ , avem că  $D'O \perp AC$ , prin urmare  $d(A, D'O) = AO = 2\sqrt{2}$  cm.

Cum măsura unghiului dintre dreptele  $BC$  și  $D'O$  este de  $60^\circ$ , rezultă că măsura unghiului  $A'D'O$  este de  $60^\circ$ . Atunci triunghiul isoscel  $A'D'O$  este chiar echilateral, iar distanța de la punctul  $A'$  la dreapta  $D'O$  este înălțimea acestui triunghi, cu lungimea de  $2\sqrt{3}$  cm.

3. Din  $(BCP) \parallel (ADQ), (BCP) \cap (MNP) = NP$  și  $(ADQ) \cap (MNP) = MQ$ , rezultă că  $NP \parallel MQ$ . Analog se arată că  $MN \parallel PQ$ , prin urmare  $MNPQ$  este paralelogram.

Dacă  $NP \parallel (ABC)$ , atunci  $NP \parallel BC$  și, cum  $BC \perp (ABN)$ , deducem că  $NP \perp (ABN)$  adică  $NP \perp MN$  și astfel  $MNPQ$  este dreptunghi.

Reciproc, dacă  $MNPQ$  este dreptunghi și  $MN \parallel AB$ , avem că  $NP$  este perpendiculară pe dreptele concurente  $MN$  (deoarece  $MNPQ$  este dreptunghi) și  $AB$  (fiindcă  $AB \perp (BCP)$ ). Rezultă că  $NP \perp (ABN)$  și, întrucât  $BC \perp (ABN)$ , obținem că  $NP \parallel BC$ .

4. Dacă  $a \equiv r \pmod{12}$  și  $a^3 \equiv r' \pmod{12}$ , între resturile  $r$  și  $r'$  există următoarea corespondență:

$r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$r'$	0	1	8	3	4	5	0	7	8	9	4	11

Fie  $r_1$  și  $r_2$  resturile modulo 12 ale numerelor  $a$ , respectiv  $b$  cu proprietatea că  $a^3 + b^3 \equiv 12$ ; presupunând că  $r_1 \leq r_2$ , vom avea că

$$(r_1, r_2) \in \{(0,0), (0,6), (6,6), (1,11), (2,4), (2,10), (4,8), (8,10), (3,9), (5,7)\}.$$

Cum  $A$  conține 8 multipli de 12, există  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  de submulțimi  $\{a, b\}$  corespunzătoare situației  $(r_1, r_2) = (0,0)$ . Apoi, vom avea  $8 \cdot 8 = 64$  submulțimi  $\{a, b\}$  corespunzătoare situației  $(r_1, r_2) = (0,6)$ ,  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  submulțimi când  $(r_1, r_2) = (6,6)$ ,  $9 \cdot 8 = 72$  submulțimi dacă  $(r_1, r_2) = (1,11)$  etc.

În total, obținem  $28 + 64 + 28 + 72 + 81 + 72 + 72 + 64 + 72 + 64 = 617$  submulțimi cu proprietatea din enunț.

### Clasa a IX-a

**1. a)** Dacă notăm  $y * z = t$ , atunci  $x * t = \{x + t\} = x + t - [x + t] = x + \{y + z\} - [x + \{y + z\}] = x + (y + z - [y + z]) - [x + (y + z - [y + z])] = x + y + z - [x + y + z] = \{x + y + z\}$  (am folosit faptul că  $[y + z]$  este număr întreg, deci iese în afara părții întregi). Analog se procedează pentru membrul drept și astfel rezultă identitatea cerută.

**b)** Avem că  $x * x * x = \{3x\} = \frac{1}{2}$ . Întrucât  $x \in [0,1)$ , rezultă că  $[3x] \in \{0,1,2\}$ . Atunci  $3x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ , prin urmare  $x \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right\}$ .

**2. a)** Se folosește metoda inducției matematice.

**b)** Ar fi suficient să arătăm că  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 < \frac{1}{10}$ , fapt care se dovedește cu ușurință.

**c)** Observăm că  $x_{2n} = 2A_{2n} - y_{2n}$ . Conform b), numărul  $y_{2n}$  are primele  $n$  zecimale 0, de unde rezultă că  $x_{2n}$  are primele  $n$  zecimale 9.

**3.** Dacă  $\triangle ABC$  și  $\triangle A'B'C'$  au același centru de greutate, atunci  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ . Deducem că  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0}$ , de unde, folosind ipoteza, obținem că  $a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA} + c\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ , adică  $(c-a)\overrightarrow{AB} + (a-b)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Vectorii  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{AC}$  fiind necoliniari, rezultă că  $a = b = c$ .

**4.** Fie  $O_1$  centrul cercului circumscris triunghiului  $BCD$  și  $O_2$  centrul cercului circumscris triunghiului  $ACD$ . Identitatea lui Sylvester arată că  $\overrightarrow{O_1H_1} = \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1D}$  și  $\overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2D}$ . Scăzând membru cu membru aceste relații, obținem că  $\overrightarrow{O_1H_1} - \overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{O_2H_2} - \overrightarrow{O_2A} + 2\overrightarrow{O_1O_2}$ . Însă  $\overrightarrow{O_1H_1} - \overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{BH_1} = \overrightarrow{AH_2} = \overrightarrow{O_2H_2} - \overrightarrow{O_2A}$ , deoarece  $H_1H_2AB$  este paralelogram. Rezultă că  $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0}$ , deci patrulaterul  $ABCD$  este inscriptibil.