



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

CLASA A V-A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

1. Se consideră numerele naturale a și b , $a > b > 0$. Se știe că, împărțind numărul a la numărul $a - b$ se obține câtul 2 și restul 3.
- a) Dacă $a = 2011$, determinați câte valori posibile are diferența $a - b$;
- b) Determinați câtul și restul împărțirii numărului b la numărul $a - b$.

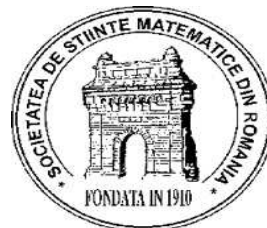
2. Se consideră mulțimea $A = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

- a) Verificați dacă $2012 \in A$;
- b) Arătați că, oricum am alege două numere din mulțimea A , suma sau diferența acestora este multiplu de 8.

3. Determinați numerele naturale m, n și p astfel încât $8^m + 11^n + 13^p = 2012$.

4. Se consideră numerele naturale a și b , astfel încât $2 \leq a < b$. Se completează fiecare dintre cele 9 pătrățele ale pătratului din figura alăturată cu numerele 1, a și b astfel încât fiecare dintre acestea să apară o singură dată pe fiecare linie și pe fiecare coloană a pătratului.

- a) Arătați că două dintre colțurile opuse ale pătratului sunt completate cu numere egale;
- b) Arătați că una dintre diagonalele pătratului este completată cu numere egale;
- c) Dacă produsul numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană și de pe fiecare diagonală este egal cu n , arătați că n este cub perfect.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -****CLASA A V-A****SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Subiectul 1. 1. Se consideră numerele naturale a și b , $a > b > 0$. Se știe că, împărțind numărul a la numărul $a - b$ se obține câtul 2 și restul 3.

a) Dacă $a = 2011$, determinați câte valori posibile are diferența $a - b$;

b) Determinați câtul și restul împărțirii numărului b la numărul $a - b$.

prelucrare *Gazeta Matematică* nr.3/2011

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Conform teoremei împărțirii cu rest, avem $a = 2 \cdot (a - b) + 3$, cu $a - b > 3$.	2 p
Adică $2011 = 2(2011 - b) + 3$, echivalent cu $2008 = 2(2011 - b)$	2 p
Deci $2011 - b = 1004$, adică $b = 1007$, o singură valoare $a - b = 1004$	2 p
b) Conform figurii alăturate, în care $AC = a$ și $AB = b$, obținem că $b = 1 \cdot (a - b) + 3$	2 p
Cum $a - b > 3$, rezultă câtul împărțirii lui b la $a - b$ egal cu 1, iar restul egal cu 3.	2p

2. Se consideră mulțimea $A = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

a) Verificați dacă $2012 \in A$;

b) Arătați că, oricum am alege două numere din mulțimea A , suma sau diferența acestora este multiplu de 8.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Restul împărțirii la 4 a oricărui număr din mulțimea A este egal cu 2.	1 p
Cum restul împărțirii lui 2012 la 4 este egal cu 0, deducem că $2012 \notin A$.	2 p
b) Fie $a, b \in A$, cu $a \geq b$; deci $a = 4p + 2$, $b = 4s + 2$, unde $p, s \in \mathbb{N}$ și $p \geq s$.	1 p
Avem $a + b = 4(p + s + 1)$ și $a - b = 4(p - s)$.	2 p
Dacă $a + b = 4(p + s + 1)$ nu se divide cu 8 înseamnă că numărul $p + s + 1$ este impar, deci numărul $p + s$ este par.	2 p
Rezultă că și numărul $p - s$ este par, deci numărul $a - b = 4(p - s)$ este multiplu al lui 8.	2 p

Subiectul 3. Determinați numerele naturale m, n și p astfel încât $8^m + 11^n + 13^p = 2012$.

prof. Mircea Fianu

Detalii rezolvare	Barem asociat
Răspuns: $m = n = 3, p = 2$	
Cum $13^2 < 2012 < 13^3$, rezultă că $p \in \{0; 1; 2\}$.	1p
Pentru $p = 2$, obținem $8^m + 11^n = 1843 < 11^4$. Deci $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.	2p
Dacă $n = 3$, obținem $8^m = 512 = 8^3$, deci $m = 3$.	2p
Dacă $n \leq 2$, rezultă că $8^m \geq 8^4 > 1843$, prin urmare nu avem soluții.	1p
Pentru $p = 1$, obținem $8^m + 11^n = 1999$, deci $n \leq 3$	1p
Cum $1999 > 1999 - 11^n = 8^m > 668$, rezultă că nu avem soluții.	1p
Dacă $p = 0$, obținem $8^m + 11^n = 2011$.	1p
Cum $2011 > 2011 - 11^n = 8^m > 680$, rezultă că nu avem soluții.	1p

Subiectul 4. Se consideră numerele naturale a și b , astfel încât $2 \leq a < b$. Se completează fiecare dintre cele 9 pătrățele ale pătratului din figura alăturată cu numerele 1, a și b astfel încât fiecare dintre acestea să apară o singură dată pe fiecare linie și pe fiecare coloană a pătratului.

- a) Arătați că două dintre colțurile opuse ale pătratului sunt completate cu numere egale;
 b) Arătați că una dintre diagonalele pătratului este completată cu numere egale;
 c) Dacă produsul numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană și de pe fiecare diagonală este egal cu n , arătați că n este cub perfect.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	Barem asociat									
a) Deoarece cele patru colțuri ale pătratului se pot completa numai cu trei numere, rezultă, conform principiului cutiei că în două dintre colțuri se află același număr.	2p									
Dar, conform ipotezei cele două colțuri nu se pot afla pe aceeași linie/coloană. Rezultă că cele două colțuri care sunt completate cu numere egale sunt opuse.	1p									
b) Considerăm $\{x; y; z\} = \{1; a; b\}$. Presupunem că, două colțuri opuse ale pătratului sunt completate cu x , iar unul dintre celelalte colțuri este completat cu y . (vezi figura). Înseamnă că linia/coloana pe care se află câte două dintre aceste colțuri se completează cu z .	<table border="1"> <tbody> <tr><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>z</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>y</td><td>z</td><td>x</td></tr> </tbody> </table> 1p	x			z			y	z	x
x										
z										
y	z	x								
Deci colțul opus lui y se completează cu z , apoi, obligatoriu, între colțurile completate cu x și z trebuie completat cu y .	<table border="1"> <tbody> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td></tr> <tr><td>z</td><td></td><td>y</td></tr> <tr><td>y</td><td>z</td><td>x</td></tr> </tbody> </table> 2p	x	y	z	z		y	y	z	x
x	y	z								
z		y								
y	z	x								
Rezultă că centrul pătratului trebuie completat cu x , deci una dintre diagonale este completată cu numere egale.	1p									
c) Condiția din ipoteză spune că $x^3 = xyz = n$.	1p									
Cum $\{x; y; z\} = \{1; a; b\}$, $2 \leq a < b$, rezultă $n = x^3 = xyz > 1$.	1p									
Argumentarea faptului că există triplete de numere care îndeplinesc condițiile problemei: $x \notin \{1; b\}$, deci $x = a$, de unde $b = a^2$.	1p									