

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -****CLASA A 9 - A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se consideră mulțimea  $M = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$  și mulțimile

$$A = \{2x+1 \mid x \in \square\} \cap M, \quad B = \{3x+2 \mid x \in \square\} \cap M, \quad C = \{5x+4 \mid x \in \square\} \cap M.$$

- a) Determinați numărul elementelor mulțimilor  $A, B$  și  $C$ .  
b) Determinați numărul elementelor mulțimii  $A \cap B \cap C$ .

2. Pentru fiecare număr natural  $n \geq 2$  se consideră numărul

$$E(n) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \sqrt{\frac{1}{(n-2)^2} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + 1}}}^{n-1} \text{ radicali}.$$

Arătați că partea întreagă a numărului  $nE(n)$  este  $n$ , pentru orice  $n \geq 2, n \in \square$ .

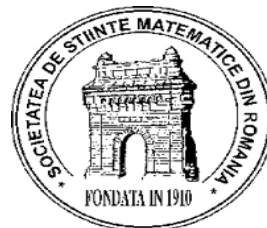
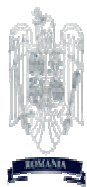
3. Pe laturile  $(AB), (BC), (CA)$  ale triunghiului  $ABC$  se iau punctele  $M, N$ , respectiv  $P$  astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA} = k.$$

- a) Arătați că  $\overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CM} = \vec{0}$ .  
b) Arătați că  $AN + BP + CM < AB + BC + CA$ .

4. Numerele reale  $x, y, z, t$  verifică relațiile  $x + y + z + t = 0$  și  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ . Arătați că

$$-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0.$$

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -****CLASA A 9 - A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1 (M. Perianu)**

Se consideră mulțimile  $M = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$ ,  $A = \{2x+1 \mid x \in \square\} \cap M$ ,  $B = \{3x+2 \mid x \in \square\} \cap M$ ,  
 $C = \{5x+4 \mid x \in \square\} \cap M$ .

- a) Determinați numărul elementelor mulțimilor  $A, B$  și  $C$ .  
b) Determinați numărul elementelor mulțimii  $A \cap B \cap C$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A = \{2x+1 \mid 0 \leq x \leq 1005\}$ are 1006 elemente	2 puncte
$B = \{3x+2 \mid 0 \leq x \leq 670\}$ are 671 elemente	2 puncte
$C = \{5x+4 \mid 0 \leq x \leq 401\}$ are 402 elemente	2 puncte
b) $n \in A \cap B \cap C$ dacă și numai dacă $n+1$ este divizibil cu $2 \cdot 3 \cdot 5$ și $n \leq 2012$	2 puncte
$A \cap B \cap C = \{30x-1 \mid 1 \leq x \leq 67\}$ are 67 de elemente	2 puncte

**Subiectul 2 (F. Dumitrel)**

Pentru fiecare număr natural  $n \geq 2$  se consideră numărul

$$E(n) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \sqrt{\frac{1}{(n-2)^2} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + 1}}}^{n-1 \text{ radicali}}.$$

Arătați că partea întregă a numărului  $nE(n)$  este  $n$ , pentru orice  $n \geq 2, n \in \square$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Trebuie să arătăm că $n \leq nE(n) < n+1$	2 puncte
Pentru prima inegalitate observăm că sub fiecare radical se află un număr $\geq 1$	2 puncte
Pentru a doua inegalitate, arătăm inductiv că $E(n) < 1+1/n$ pentru $n \geq 2$	2 puncte
Într-adevăr, $E(2) = \sqrt{2} < 1+1/2$ , iar dacă $E(n) < 1+1/n$ , atunci $E(n+1) = \sqrt{1/n^2 + E(n)} < \sqrt{1/n^2 + 1/n+1} < 1+1/(n+1)$	4 puncte

**Subiectul 3** (*M. și S. Monea*)

Pe laturile  $(AB), (BC), (CA)$  ale triunghiului  $ABC$  se iau punctele  $M, N$ , respectiv  $P$  astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA} = k.$$

a) Arătați că  $\overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CM} = \vec{0}$ .

b) Arătați că  $AN + BP + CM < AB + BC + CA$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\overline{AN} = \frac{1}{k+1} \overline{AB} + \frac{k}{k+1} \overline{AC}$ și analoagele (1)	3 puncte
Rezultă $\overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CM} = \frac{1}{k+1} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) + \frac{k}{k+1} (\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA}) = \vec{0}$	2 puncte
b) Din (1), $AN < \frac{1}{k+1} AB + \frac{k}{k+1} AC$ și analoagele	3 puncte
Prin adunare obținem concluzia	2 puncte

**Subiectul 4** (\*\*\*)

Numerele reale  $x, y, z, t$  verifică relațiile  $x + y + z + t = 0$  și  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ . Arătați că

$$-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Concluzia este $-1 \leq (x+z)(y+t) \leq 0$	2 puncte
A doua inegalitate rezultă din $y+t = -(x+z)$ (1)	2 puncte
$(x+z)^2 + (y+t)^2 \leq 2(x^2 + z^2) + 2(y^2 + t^2) = 2$	3 puncte
Utilizând (1) rezultă $2(x+z)^2 \leq 2$ , de unde $-(y+t)(x+z) = (x+z)^2 \leq 1$ , deci $(x+z)(y+t) \geq -1$ .	3 puncte