

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a V-a

1. a) Calculați $1^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$;
 b) Demonstrați că numărul 2011^{2011} poate fi scris ca o sumă de cinci pătrate perfecte.
- (Gazeta Matematică nr.10 /2011)*

2. Într-o tabără sunt cel mult 50 elevi, băieți și fete. Dacă ar mai veni în tabără 17 băieți și 29 de fete atunci numărul fetelor ar fi egal cu numărul băieților. Demonstrați că în tabără sunt mai puțin de 20 de fete.

3. a) Calculați suma $11+12+13+14+\dots+49+50$;
 b) Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale de la 11 la 50 într-o ordine oarecare. Un elev alege două numere le șterge și în locul lor scrie un singur număr, respectiva suma celor două numere șterse. Repetă apoi acest procedeu până pe tablă mai rămâne scris un singur număr. Care va fi acest număr?

4. a) Fie a, b și c trei cifre nenule. Arătați că numărul $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ este divizibil cu 37.
 b) Se consideră numărul $B = \underbrace{78900\dots00}_{2012 \text{ cifre}} + \underbrace{89700\dots00}_{2012 \text{ cifre}} + \underbrace{97800\dots00}_{2012 \text{ cifre}} + 2012$. Determinați restul împărțirii numărului B la 37.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a VI-a

1. a) Fie $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{10}\right)$ și $B = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{10}\right)$. Calculați $\frac{A}{B}$.
- b) Demonstrați că numărul $C = 1234567891011$ nu este pătrat perfect.

2. Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ de măsură 160° și (OC) bisectoarea sa. Fie P un punct situat în interiorul unghiului $\sphericalangle AOC$.

- a) Demonstrați că $m(\sphericalangle COP) = \frac{1}{2}(m(\sphericalangle BOP) - m(\sphericalangle AOP))$;
- b) Dacă $m(\sphericalangle BOP) = 3m(\sphericalangle COP)$, calculați măsura unghiului AOP .

3. a) Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr prim mai mare strict decât 3. Demonstrați că restul împărțirii lui p la 6 este 1 sau 5.
- b) Considerăm patru numere prime distincte a, b, c și d mai mari decât 3 cu suma divizibilă cu 6. Să se demonstreze că numărul $A = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ se divide cu 576.

(Gazeta Matematică nr.12 /2011)

4. Pe o dreaptă se consideră, în această ordine, punctele A, B, C, D, E și F astfel încât $2AC = AB + AD$ și $2CF = AF + EF$.

- a) Arătați că $BC = CD$;
- b) Dacă $AB = 5 \text{ cm}$, determinați lungimea segmentului $[DE]$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.