Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a VII-a

1. Fie *a,b,c,x,y* și *z* numere raţionale strict pozitive astfel încât $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

a) Să se demonstreze că dacă y este media aritmetică a numerelor x şi z atunci b reprezintă media aritmetică a numerelor a şi c.

b) Demonstraţi că $(2a+b+3c)(3x+4y+5z)=(2x+y+3z)(3a+4b+5c)$.

2. a) Determinaţi perechile de numere naturale nenule (x,y) astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

b) Demonstraţi că numărul $a=\sqrt{2011^{2011}+2012^{2010}+2013^{2009}}$ este număr iraţional.

3. Pe latura (BC) a triunghiului oarecare ABC se consideră un punct M. Fie T şi U picioarele perpendicularelor duse din A pe bisectoarele unghiurilor AMB, respectiv AMC.

a) Demonstraţi că $[AM]\equiv[TU]$;

b) Demonstraţi că $TU \parallel BC$.

4. Fie pătratul $ABCD$ şi punctele $E\in(BC)$, $F\in(DC)$. Dacă $m(\sphericalangle BAE)=15^\circ$ şi $m(\sphericalangle DAF)=30^\circ$, să se determine $m(\sphericalangle AEF)$.

(Gazeta Matematică nr. 7-8-9 /2011)

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a VIII-a

1. a) Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că:

$$(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a+b+c)^2=4(a^2+b^2+c^2).$$

b) Să se demonstreze că numărul $A=22^{22}+44^{44}+66^{66}$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale pătrate perfecte.

2. Se consideră tetraedrul $VABC$ și punctele M, N și P mijloacele muchiilor VA, VB, respectiv VC.

a) Demonstraţi că planele (ABC) şi (MNP) sunt paralele;

b) Dacă T reprezintă piciorul perpendicularei din V pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle VAB$, demonstraţi că punctele M,N,P şi T sunt coplanare.

3. a) Fie $a,b,c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a\sqrt{3}+b\sqrt{5}=c$. Demonstraţi că $a=b=c=0$;

b) Determinaţi numerele $x,y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\dfrac{x}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{y}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}=\dfrac{2}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$.

4. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică în punctul A perpendiculara SA, cu $SA=AB=a\sqrt{3}$. Fie $M\in(BC)$ astfel încât $MC=a$.

a) Demonstraţi că $BD\perp SC$;

b) Calculaţi distanţa de la punctul S la dreapta MD.

(Supliment Gazeta Matematică nr. 11 /2011)

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a IX-a

1. Fie AD, BE şi CF bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC, cu $D\in(BC)$, $E\in(AC)$ şi $F\in(AB)$.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{AD}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, unde $b=AC$ şi $c=AB$;

b) Demonstraţi că $AD<\dfrac{2bc}{b+c}$;

c) Demonstraţi că $AD+BE+CF<AB+BC+CA$.

2. Se consideră un triunghi echilateral ABC .şi M un punct interior. Fie D,E şi F proiecţiile punctului M pe laturile BC, CA şi respectiv AB.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului;

b) Fie G centrul de greutate al triunghiului DEF, demonstraţi că punctele M,O şi G sunt coliniare.

3. a) Fie $x\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că $x(x+1)-(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)=4$;

b) Să se demonstreze că pentru orice $k\in\mathbb{Z}$, există $n\in\mathbb{N}^*$ şi o alegere convenabilă a semnelor $+$ şi $-$ astfel încât:

$$2k=\pm1\cdot2\pm2\cdot3\pm\ldots\pm n(n+1).$$

(Gazeta Matematică nr.7-8-9 /2011- enunţ modificat)

4. Se consideră numerele reale $x,y,z\in(0,\infty)$ astfel încât $x+y+z=1$.

a) Demonstraţi că $\dfrac{x-y}{xy+z}+\dfrac{y-z}{yz+x}+\dfrac{z-x}{zx+y}=0$;

b) Demonstraţi că $\dfrac{x}{xy+z}+\dfrac{y}{yz+x}+\dfrac{z}{zx+y}\geq\dfrac{9}{4}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a X-a

1. **a)** Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt[3]{\dfrac{a+b}{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}$. Demonstraţi că $|a|=|b|$;

b) Determinaţi soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=2$.

2. Fie $z,u,w\in\mathbb{C}$ astfel încât $z+u+w=0$.

a) Demonstraţi că $3\left(|z|^2+|u|^2+|w|^2\right)=|z-u|^2+|u-w|^2+|w-z|^2$;

b) Demonstraţi că $3\left(|z|+|u|+|w|\right)\le 2\left(|z-u|+|u-w|+|w-z|\right)$.

3. **a)** Fie n un număr natural, $n\ge 2$. Demonstraţi că $\log_{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\dfrac{n+1}{2}>\dfrac{1}{n}$;

b) Să se rezolve ecuaţia $2^x+2^{-x}=2\cos\dfrac{x}{3}$ în mulțimea numerelor reale.

(Gazeta Matematică nr.7-8-9 /2011)

4. Fie $a>0$, $a\ne 1$. Să se determine toate funcţiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:

(i) $|f(x)-f(y)|\le\left|a^x-a^y\right|,\ \forall x,y\in[0,1]$;

(ii) $\{f(0),f(1)\}=\{1,a\}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cu $a\in(0,1)$ şi $b\in\mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că există şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$;

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+...+a_n)$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $Tr(AB)=Tr(A)Tr(B)$.

a) Demonstraţi că $\det(A+B)=\det A+\det B$;

b) Demonstraţi că $\det(xA+yB)+\det(yA+xB)=(x^2+y^2)(\det A+\det B)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

3. Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $x_{n+1}=\dfrac{x_n^3+ax_n}{1+a}$, $n\geq o$, $x_0\in(0,1)$ şi $a>0$.

a) Demonstraţi că $x_n\in(0,1)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

(Gazeta Matematică nr. 11 /2011 enunţ modificat)

4. Se consideră o funcţie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ astfel încât

(i) $|f(n+1)-f(n)|\leq 1, (\forall) n\in\mathbb{Z}$;

(ii) există $x,y\in\mathbb{Z}$, $x<y$ astfel încât $f(x)f(y)<0$.

a) Demonstraţi că $|x-y|\geq 2$;

b) Demonstraţi că există $c\in\mathbb{Z}$, $x<c<y$ astfel încât $f(c)=0$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim legea "$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ este grup comutativ;

b) Calculaţi $1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \ldots \circ \frac{1}{2012}$.

2. a) Calculaţi $\int x^3 \ln^2 x dx$, pentru $x > 0$.

b) Calculaţi $\int \frac{x}{e^x + 1 + x} dx$, pentru $x > 0$.

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $f : G \to G$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ un morfism.

a) Demonstraţi că $x^{n-1} y^n = y^n x^{n-1}$;

b) Dacă în plus G este finit cu $n^2 - n - 1$ elemente, arătaţi că G este comutativ.

(Gazeta Matematică nr. 12 /2011)

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă principală $T > 0$.

a) Să se arate că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) t - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt$ este periodică;

b) Demonstraţi că $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$;

c) Dacă $\alpha \in [1, \infty)$, calculaţi $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha f(t) dt$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro