SUBIECTUL III

a) Arătaţi $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}, \forall x,y\in \boldsymbol{R}$ şi a, b > 0.

b) Arătaţi că $\frac{x}{2y+4z}+\frac{y}{x+5z}+\frac{9z}{5x+4y}\geq 1$ pentru orice numere $x,y,z>0$.

(G.M. nr 1/2011)

Rezolvare:

a) Se verifică prin calcul direct.. 3p

b) Din inegalitatea de la a) obtinem $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$.........................1p

Deci $\frac{x^2}{2xy+4xz}+\frac{y^2}{xy+5yz}+\frac{9z^2}{5xz+4yz}\geq\frac{(x+y+3z)^2}{3xy+9yz+9xz}$...1p

Folosind $(x+y+3z)^2\geq 3(xy+3xz+3yz)$ 1p

obtinem $\frac{(x+y+3z)^2}{3xy+9yz+9xz}\geq 1$ 1p

SUBIECTUL IV

a) Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n=1+\left[\frac{2^{p+2}+2^2+1}{2^p+1}\right]+\left[\frac{3^{p+2}+3^2+1}{3^p+1}\right]+\cdots+\left[\frac{n^{p+2}+n^2+1}{n^p+1}\right]$, unde $p\in \boldsymbol{N}^*$, iar [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x. Arătaţi că $x_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale cu proprietatea că suma primilor n termeni ai săi este $S_n=\frac{6x_n}{n+1}$, arătaţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

Rezolvare:

a) $\left[\frac{k^{p+2}+k^2+1}{k^p+1}\right]=\left[k^2+\frac{1}{k^p+1}\right]=k^2$ 3p

Deci $x_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.. ..1p

b) $S_n=2n^2+n$ 1p

$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-1$ 1p

$a_n-a_{n-1}=$constant $\forall n\in N^*$ 1p