INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI VÂLCEA

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2012
CLASA A IX- A

SUBIECTUL I

a) Demonstraţi că $\frac{n^2-n-1}{n!}=\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{n!}, \forall n\in N, n\geq 2$, unde $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

b) Arataţi că pentru orice $n\in N, n\geq 2, \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2-k-1}{k!}<2.$

prof. Vărzaru Gabriela, prof. Pigui Tiberiu, Rm. Vâlcea

SUBIECTUL II

a) Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Arătaţi că $\overrightarrow{AI}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$, unde $a=BC,\ b=AC,\ c=AB.$

b) În triunghiul ABC se consideră bisectoarele AA', BB', CC'. Dacă $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

prof. Vărzaru Gabriela, prof. Pigui Tiberiu, Rm. Vâlcea

SUBIECTUL III

a) Arătaţi $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}, \forall x,y\in \boldsymbol{R}$ şi a, b > 0.

b) Arătaţi că $\frac{x}{2y+4z}+\frac{y}{x+5z}+\frac{9z}{5x+4y}\geq 1$, pentru orice numere $x,y,z>0.$

(G.M. nr 1/2011)

SUBIECTUL IV

a) Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n=1+\left[\frac{2^{p+2}+2^2+1}{2^p+1}\right]+\left[\frac{3^{p+2}+3^2+1}{3^p+1}\right]+\cdots+\left[\frac{n^{p+2}+n^2+1}{n^p+1}\right]$, unde $p\in \boldsymbol{N}^*$, iar [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x. Arătaţi că $x_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale cu proprietatea că suma primilor n termeni ai săi este $S_n=\frac{6x_n}{n+1}$, arătaţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

Prof. Ureche Ion, Colegiul Tehnic Energetic

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte
Toate subiectele sunt obligatorii