SUBIECTUL II

a) Fie mulţimea :$M = \{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \,/ x, y, z \in N^*, x \neq y \neq z \neq x\}$.
Aflaţi cel mai mic element al mulţimii M.

G.M. –B Nr.2/2011

b) Arătaţi că $\min(a + c - 4b^2, a + b - 4c^2, b + c - 4a^2) \leq \frac{1}{4}$, unde a,b,c sunt numere reale.

Soluţie :

a) Avem $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$.

Expresia fiind simetrică în x, y, z putem alege $x < y < z$..1p

Cum x, y, z sunt numere naturale avem $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$ 1p

şi atunci

$\frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq \frac{1}{2}(1^2 + 1^2 + 2^2) = 3$, adică

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 3$...
........1p

De aici rezultă că cel mai mic element al lui M este 3 şi se obţine pentru

$x = 1, y = 2, z = 3$..
............1p

b) Presupunem prin absurd că toate cele 3 numere din paranteză sunt mai

mari strict decât $\frac{1}{4}$.Obţinem $a + c - 4 \cdot b^2 > \frac{1}{4}, a + b - 4 \cdot c^2 > \frac{1}{4}, b + c - 4 \cdot a^2 > \frac{1}{4}$ 1p

şi , adunând cele 3 relaţii avem

$2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c - 4 \cdot a^2 - 4 \cdot b^2 - 4 \cdot c^2 > \frac{3}{4} \Rightarrow (2 \cdot a - \frac{1}{2})^2 + (2 \cdot b - \frac{1}{2})^2 + (2 \cdot c - \frac{1}{2})^2 < 0$ ceea ce este fals.

Deci,presupunerea făcută este falsă..2p

Aşadar avem că $\min(a + c - 4 \cdot b^2, a + b - 4 \cdot c^2, b + c - 4 \cdot a^2) \leq \frac{1}{4}$.