INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VÂLCEA

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

SUBIECTUL II

Considerăm $f:(-1,1)\to R, f(x)=\begin{cases}\arcsin x + arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x\in(-1,1)-\{0\}\\ 0, x=0\end{cases}$ si g restricția lui f la (0,1).

Arătați că:

1) f nu admite primitive
2) g admite primitive si calculati $\int g(x)dx$

prof. Ureche Ion, Rm Vâlcea

Rezolvare:

1) Functia f este derivabila pe (-1,0)U(0,1) si $f'(x)=0$. Rezulta (conform unei consecinte a T. lui Lagrange) ca f este constanta pe fiecare interval in parte 1p

$f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}(\forall)x\in(0,1)$ 1p

$f(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=-\frac{\pi}{2}(\forall)x\in(-1,0)$ 1p

Deci $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-\pi}{2}, x\in(-1,0)\\ o, x=0\\ \dfrac{\pi}{2}, x\in(0,1)\end{cases}$ iar $f((-1,1))=\left\{\frac{-\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\right\}$ care nu este interval. 1p

Rezulta ca f nu are proprietatea lui Darboux , deci nu admite primitive 1p

Met 2. Pentru $x_0=0$ $f(o)=0$, $l_s=arctg(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$ iar $l_d=arctg(\infty)=\frac{\pi}{2}$. Deci în punctul $x_0=0$ functia f are limite laterale diferite de $f(x_0)$. Rezulta ca f nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul (-1,1), deci nu admite primitive .

2) $g=f/_{(0,1)}\Rightarrow g:(0,1)\to R, g(x)=\frac{\pi}{2}$ 1p

$\Rightarrow \int g(x)dx=\frac{\pi}{2}x+C$ 1p