SUBIECTUL IV

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin impar şi H un subgrup de ordin 3 al lui G. Ştiind că $xyx^{-1} \in H, (\forall) x \in G, (\forall) y \in H$, să se arate că elementele lui H comută cu elementele lui G.

Gazeta Matematică

Rezolvare

$ordH = 3 \Rightarrow (\exists) a \in G, a \neq e$ a.î. $H = \{e, a, a^2\}$

Fie $x \in G \Rightarrow xax^{-1} \in H$ 1p

1. $xax^{-1} = e \Rightarrow xa = x \Rightarrow a = e (F)$..1p
2. $xax^{-1} = a^2 \Rightarrow a = x^{-1}a^2x \Rightarrow a = x^{-1}(x^{-1}a^2x)x = x^{-3}a^2x^3 \Rightarrow ind \Rightarrow a = x^{-2k-1}a^2x^{2k+1}, (\forall) k \geq 1$...........2 p

   Cum $|G|$ impar, atunci $(\exists) k \geq 1$ cu $|G| = 2k+1$

   Din $x^{2k+1} = e \Rightarrow a = a^2$ (F)...2p
3. $xax^{-1} = a \Rightarrow xa = ax$ 1p