INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI VÂLCEA

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2012
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A

SUBIECTUL II

a) Să se demonstreze că dacă $a,b,c\in(0,1)$ sau $a,b,c\in(1,\infty)$ atunci $(n+\log_a b)(n+\log_b c)(n+\log_c a)\ge(n+1)^3$

b) Să se rezolve în **R** ecuaţia $\log_{2012}\left(\frac{x^2}{16}+2011\right)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$.

Soluţie:

a) Din $a,b,c\in(0,1)$ sau $a,b,c\in(1,\infty)$ rezultă că $\log_a b>0$, $\log_b c>0$, $\log_c a>0$ 1p

$n+\log_a b=1+1+...+1+\log_a b\ge(n+1)\sqrt[n+1]{\log_a b}$

$n+\log_b c=1+1+...+1+\log_b c\ge(n+1)\sqrt[n+1]{\log_b c}$

$n+\log_c a=1+1+...+1+\log_c a\ge(n+1)\sqrt[n+1]{\log_c a}$ 1p

Înmulţind relaţiile se obţine $(n+\log_a b)(n+\log_b c)(n+\log_c a)\ge(n+1)^3\sqrt[n+1]{\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a}$ 1p

$(n+\log_a b)(n+\log_b c)(n+\log_c a)\ge(n+1)^3\sqrt[n+1]{\log_a a}\Leftrightarrow(n+\log_a b)(n+\log_b c)(n+\log_c a)\ge(n+1)^3$ ..1p

b) Condiţii de existenţă: $\begin{cases}x^2-1\ge0\\ x^2\ne0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. 1p

Evident $\log_{2012}\left(\frac{x^2}{16}+2011\right)>\log_{2012}2011$ şi $\log_{2012}2011>\frac{1}{2}$.

Dar $\frac{1}{2}\ge\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\Leftrightarrow x^2\ge2\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^4\ge4x^2-4\Leftrightarrow(x^2-2)^2\ge0$ care este adevărată pentru orice $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. 1p

Deci $\log_{2012}\left(\frac{x^2}{16}+2011\right)>\frac{1}{2}\ge\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\Leftrightarrow\log_{2012}\left(\frac{x^2}{16}+2011\right)>\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$,

adică ecuaţia nu are soluţii 1p