INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI VÂLCEA

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2012
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A

SUBIECTUL III

Fie z_1, z_2 numere complexe de acelaşi modul şi fie a un număr real, $a>1$. Să se arate că:

$$(a+1)|z_1+z_2| \le 2|az_1+z_2|.$$

Soluţie:

Fie $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Din $|z_1| = |z_2|$ rezultă că $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ 1p

Ridicând la pătrat, inegalitatea este echivalentă cu:

$(a+1)^2\left[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\right] \le 4\left[(ax_1+x_2)^2+(ay_1+y_2)^2\right]$ 1p

$2(a+1)^2\left(x_1^2+y_1^2+x_1x_2+y_1y_2\right) \le 4\left[\left(a^2+1\right)\left(x_1^2+y_1^2\right)+2a\left(x_1x_2+y_1y_2\right)\right]$ 1p

$(a-1)^2\left(x_1^2+y_1^2-x_1x_2-y_1y_2\right) \ge 0$ 2p

$x_1^2+y_1^2 \ge x_1x_2+y_1y_2$ 1p

Cum $x_1^2+x_2^2 \ge 2x_1x_2$, $y_1^2+y_2^2 \ge 2y_1y_2$, avem prin adunare $2\left(x_1^2+y_1^2\right) \ge 2\left(x_1x_2+y_1y_2\right)$ ceea ce trebuia demonstrat 1p