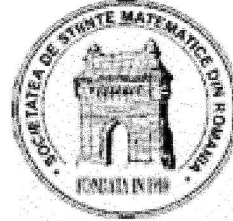




INSPECTORATUL
ȘCOLAR AL
JUDEȚULUI
VÂLCEA



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2012
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL III

Fie z_1, z_2 numere complexe de același modul și fie a un număr real, $a > 1$. Să se arate că:

$$(a+1)|z_1 + z_2| \leq 2|az_1 + z_2|.$$

Soluție:

Fie $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. Din $|z_1| = |z_2|$ rezultă că $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ 1p

Ridicând la pătrat, inegalitatea este echivalentă cu:

$$(a+1)^2 [(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2] \leq 4 [(ax_1 + x_2)^2 + (ay_1 + y_2)^2] \dots\dots\dots 1p$$

$$2(a+1)^2 (x_1^2 + y_1^2 + x_1x_2 + y_1y_2) \leq 4 [(a^2 + 1)(x_1^2 + y_1^2) + 2a(x_1x_2 + y_1y_2)] \dots\dots\dots 1p$$

$$(a-1)^2 (x_1^2 + y_1^2 - x_1x_2 - y_1y_2) \geq 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$x_1^2 + y_1^2 \geq x_1x_2 + y_1y_2 \dots\dots\dots 1p$$

Cum $x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2, y_1^2 + y_2^2 \geq 2y_1y_2$, avem prin adunare $2(x_1^2 + y_1^2) \geq 2(x_1x_2 + y_1y_2)$ ceea ce trebuia demonstrat 1p