OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - IX – a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

$0 \le \{x\} < 1 \Rightarrow -20\{x\} \in (-20,0] \Rightarrow [x] \in (-20,0]$	2 p
Un număr real este cu atât mai mic cu cât are partea întreagă mai mică. Obținem $[x] = -19$	2 p
$-19 = -20\{x\} \Rightarrow \{x\} = 0{,}95$	1 p
$x = [x] + \{x\} \Rightarrow x = -18{,}05$	2 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 2

a) Pentru n=0 obținem $A_0 = \{x \in R : \lvert x\rvert + \lvert x\rvert \le 0\} = \{0\}$	1 p
Pentru n < 0 , $\Rightarrow A_n = \phi$	1 p
Pentru n > 0 , avem : Dacă x≤-n ⇒-x + n – x – n ≤2n ⇒x≥-n ; deci x = -n	1 p
Dacă x$\in (-n;n)$ ⇒ -x + n + x + n ≤ 2n , adevărat	1 p
Dacă x≥n ⇒ x – n + x + n ≤ 2n ⇒ x≤n ⇒ x=n	1 p
Obținem $A_n = [-n;n]$	1 p
b) Avem $[-1;1] \cap [-2;2] \cap .... \cap [-100;100] = [-1;1]$	1 p
TOTAL	7 p

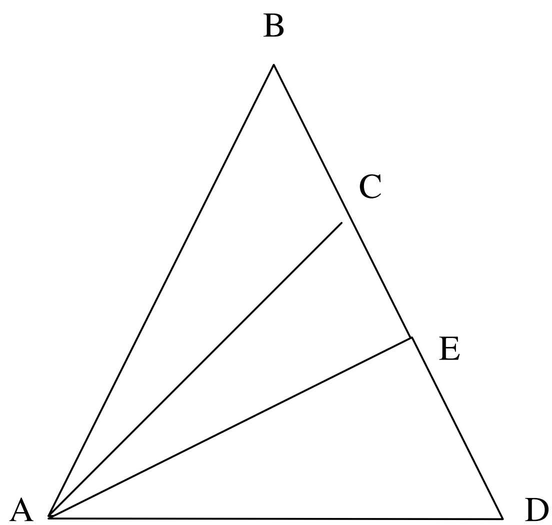
SUBIECTUL 3

Din inegalitatea Cauchy – Buniakowsky avem : $$(t+u)\left(\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{u}\right) \ge (x+y)^2$$	3 p
Sau pentru t + u > 0 , obținem : $\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{u} \ge \frac{(x+y)^2}{t+u}$	1 p
Folosind această inegalitate avem : $$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \ge \frac{2^2}{1+ab+1+bc} + \frac{1}{1+ac} \ge \frac{3^2}{3+ab+bc+ac} \ge \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = 1$$	3 p
TOTAL	7 p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.ro
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18 februarie 2012
Clasa a - IX – a
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 4



Construim pe dreapta BC , în acelaşi semiplan cu C față de AB , punctul D astfel ca m(<BAD) = 60°. Atunci triunghiul ABC este echilateral şi avem AD = BD = AB = 1	1 p
Fie E mijlocul lui (BD) . BE = ED = $\frac{1}{2}; AE \perp BD$ şi m(<BAE) = m(<DAE) = 30° $\Rightarrow$ (AC este bisectoarea unghiului BAE.	1 p
Din teorema bisectoarei , avem $\frac{BC}{CE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{BC + CE} = \frac{AB}{AB + AE}$	1p
Cum AE = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ BC = 2 - $\sqrt{3}$	1p
Cum CE = BE – BC $\Rightarrow CE = \frac{\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$	1p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.ro
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ACE, obținem $AC=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$	2p
TOTAL	7p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18 februarie 2012
Clasa a - X – a
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

$(2^x)^2+(3^x)^2+(-5^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 3^x-2\cdot 2^x\cdot 5^x-2\cdot 3^x\cdot 5^x$	2 p
$(2^x+3^x-5^x)^2=0\Rightarrow 2^x+3^x-5^x=0$	2 p
$\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$ are soluție unică	2 p
$x=1$	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 2

$x^2+2\geq 2$; $\forall x\in \mathrm{R}\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)\leq \log_{\frac{1}{2}}2=-1$	1 p
$\|x\|+1\geq 1$; $\forall x\in R\Rightarrow$ $\log_{\frac{1}{3}}(\|x\|+1)\leq \log_{\frac{1}{3}}1=0$	1 p
Avem $(x^2+2)^{\log_{\frac{1}{2}}3}=3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)}$	1 p
Funcția 3^x este strict crescătoare şi $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)\leq -1$, rezultă $3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)}\leq 3^{-1}=\frac{1}{3}$	2 p
Deci : $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)+\log_{\frac{1}{3}}(\|x\|+1)+(x^2+1)+(x^2+2)^{\log_{\frac{1}{2}}3}\leq -1+0+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}<0$	1 p
În concluzie , ecuația dată nu are soluții	1 p
TOTAL	7 p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.ro
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18 februarie 2012
Clasa a - X – a
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 3

Fie $S=(x_{2n}+x_{8n})(x_{3n}+x_{5n})=\left(a^{2n}+b^{2n}+a^{8n}+b^{8n}\right)\cdot\left(a^{3n}+b^{3n}+a^{5n}+b^{5n}\right)$ şi $D=(x_n+x_{7n})(x_{4n}+x_{6n})=\left(a^{n}+b^{n}+a^{7n}+b^{7n}\right)\cdot\left(a^{4n}+b^{4n}+a^{6n}+b^{6n}\right)$	1p
Efectuând calculele se obține :	
$S=a^{5n}+b^{5n}+a^{7n}+b^{7n}+a^{11n}+b^{11n}+a^{13n}+b^{13n}+(ab)^{2n}\left(b^{3n}+a^{n}+a^{3n}+b^{n}\right)+(ab)^{3n}\left(a^{5n}+b^{5n}\right)+$ $+(ab)^{5n}\left(a^{3n}+b^{3n}\right)$	1p
$D=a^{5n}+b^{5n}+a^{7n}+b^{7n}+a^{11n}+b^{11n}+a^{13n}+b^{13n}+(ab)^{n}\left(b^{3n}+b^{5n}+a^{3n}+a^{5n}\right)+(ab)^{4n}\left(a^{3n}+b^{3n}\right)+$ $+(ab)^{6n}\left(a^{n}+b^{n}\right)$	1p
Dacă ab=1,atunci S=D = $a^{n}+b^{n}+a^{7n}+b^{7n}+a^{11n}+b^{11n}+a^{13n}+b^{13n}+2\left(a^{3n}+b^{3n}\right)+2\left(a^{5n}+b^{5n}\right)$	1p
Dacă ab = - 1 şi n = 2k , atunci S = D = $a^{n}+b^{n}+a^{7n}+b^{7n}+a^{11n}+b^{11n}+a^{13n}+b^{13n}+2\left(a^{3n}+b^{3n}\right)+2\left(a^{5n}+b^{5n}\right)$	1p
Dacă ab = - 1 şi n = 2k + 1 , atunci S = D = $a^{n}+b^{n}+a^{7n}+b^{7n}+a^{11n}+b^{11n}+a^{13n}+b^{13n}$	2p
TOTAL	7p

SUBIECTUL 4

Din ipoteză avem relația : $a^2+b^2+c^2=1$	1p
Funcția $\ln : R_+ \to R$ este concavă , deci : $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\geq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$ unde $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$	2p
Luăm : $\lambda_1=\dfrac{a}{a+b+c}$; $\lambda_2=\dfrac{b}{a+b+c}$; $\lambda_3=\dfrac{c}{a+b+c}$ şi $x_1=a$; $x_2=b$; $x_3=c$	2p
Obținem : $\dfrac{a}{a+b+c}\ln a+\dfrac{b}{a+b+c}\ln b+\dfrac{c}{a+b+c}\ln c\leq\ln\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$	1p
Deci : a lna + b lnb + c lnc + (a + b + c)ln(a + b + c) $\leq$ 0	1p
TOTAL	7p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.ro
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18 februarie 2012
Clasa a - XI – a
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

$\det(A^{2012}) = (\det A)^{2012} \Rightarrow \det(A) = 0$	2 p
$A^2 - Tr(A)\cdot A + (\det A)\cdot I_2 = O_2 \Rightarrow$ $A^2 = Tr(A)\cdot A$	2 p
$A^{2012} = [Tr(A)]^{2011}\cdot A \Rightarrow$ $A = O_2$ sau $Tr(A) = 0$	2 p
În ambele cazuri $A^{2011} = O_2$	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 2

Fie polinomul de gradul al doilea : f(x) = det ((A+B) + x(A-B)) = $x^2\det(A-B) + mx + \det(A+B)$	1 p
Avem : 0 = $\det(A^2+B^2) = \det\left[\frac{1}{2}\left((A+B)^2+(A-B)^2\right)\right] = \frac{1}{4}\det\left((A+B)^2+(A-B)^2\right) =$ $\frac{1}{4}\det[(A+B)+i(A-B)]\det[(A+B)-i(A-B)]$	3 p
Rezultă f(i) = f(-i) = 0 $\Rightarrow$ f(x) = a(x^2+1)	1 p
Deci , det (A + B) = det (A - B)	1 p
Dar , det (A + B) + det (A - B) = 2·det A + 2·det B şi în final det (A + B) = det A + det B	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 3

Înlocuind „formal” pe n cu ∞ , condițiile problemei sunt îndeplinite atunci când a + b = 1	1 p
Atunci : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\sqrt[n]{n}+b\right)^{\frac{n}{\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a\sqrt[n]{n}+1-a-1\right)^{\frac{n}{\ln n}} =$	2 p
$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+a\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{a\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}\cdot\frac{an\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{\ln n}} =$	1 p
$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{\ln\sqrt[n]{n}}} =$	1 p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.ro
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{\ln\left(1+\sqrt[n]{n}-1\right)}} = e^a$	2 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 4

a) Se scrie $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$	1 p
Se obține $a_n = f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n) = \dfrac{1^3}{2^2}\cdot\dfrac{2^3}{3^2}\cdot\dfrac{3^3}{4^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3}{(n+1)^2} = \dfrac{n!}{(n+1)^2}$	2 p
b) $\dfrac{1}{(k+1)a_k}=\dfrac{k+1}{k!}=\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{(k-1)!}$, k $\geq$ 1. Prin însumare se obține $\dfrac{1}{2a_1}+\dfrac{1}{3a_2}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)a_n}=x_n+y_n$; unde $x_n=\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$ şi $y_n=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)!}$	2 p
Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e-1$	1 p
Obținem : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2a_1}+\dfrac{1}{3a_2}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)a_n}\right)=2e-1$	1 p
TOTAL	7 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - XII – a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

Cum 641 = 640 + 1 = $5.2^7 + 1$ si	1 p
641= 625 + 16 = $5^4 + 2^4$ rezulta ca	1 p
$5.2^7 \equiv -1 \pmod{641}$ si $2^4 \equiv -5^4 \pmod{641}$	2 p
Din prima congruenta rezulta $5^4 . 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ care inmultita cu a doua da	1 p
$5^4 .2^{32} \equiv -5^4 \pmod{641}$,	1 p
de unde $2^{32} \equiv -1 \pmod{641}$.	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 2

a) Verificarea faptului că legea este o lege internă pe G	1 p
Verificarea axiomelor grupului ; e = 0 şi x′ = - x	2 p
b) Verificarea faptului că f este morfism	1 p
Verificarea faptului că f este bijectivă	1 p
c) Presupunem prin absurd că (G ; *) $\approx (R^*,\cdot)$. Cum (G ; *) $\approx$ (R ; +) ar rezulta că	
(R ; +) $\approx (R^*,\cdot)$ ceea ce este o contradicție , deoarece : în $(R^*;\cdot)$ elementul -1 are ordinul 2 , căci $(-1)^2 = 1$ şi -1 $\neq$ 1, în timp ce în grupul (R ; +) nu avem elemente de ordinul 2 , căci x+x = 0 ,adică x = 0 , care are ordinul 1	2 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 3

Notăm t = nax ; dt = na dx	2 p
x = 0 $\Rightarrow$ t = 0 x = 1 $\Rightarrow$ t = na	1 p
Atunci avem : $\int_0^1 f(nax)dx = \int_0^{na} f(t)\frac{dt}{na} = \frac{1}{na}\int_0^{na} f(t)dt$	2 p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.ro
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

Să considerăm $G: R^* \to R$, G(a) = $\int_0^{na} f(t)dt \equiv 0$ este o primitivă a lui f . Deci f este identic nulă	2 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 4

Notăm $\sqrt{x} = t \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 2tdt$ .Pentru x = 0 avem t = 0 ; iar pentru $x = \frac{\pi^2}{4}$ avem $t = \frac{\pi}{2}$	1 p
Atunci : I = 2$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tdt}{1+\sin t + \cos t}$. Notând y = $\frac{\pi}{2} - t$, avem dy = - dt . Pentru t = 0 avem $y = \frac{\pi}{2}$; iar pentru $t = \frac{\pi}{2}$ avem y = 0	1 p
I = 2$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\frac{\pi}{2} - y}{1+\cos y + \sin y}(-dy)$ = 2$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}}{1+\cos y+\sin y}dy - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{1+\cos y+\sin y}dy$ = $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1+\cos y+\sin y} - I$	2 p
Avem , $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1+\frac{1-tg^2\frac{y}{2}}{1+tg^2\frac{y}{2}}+\frac{2tg\frac{y}{2}}{1+tg^2\frac{y}{2}}}$ = $\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2\frac{y}{2}}{2+2tg\frac{y}{2}}dy$	2 p
Notăm tg$\frac{y}{2}$ = u ; du = $\frac{1}{2}\left(1+tg^2\frac{y}{2}\right)dy$. Pentru y = 0 avem u = 0 ; iar pentru $y = \frac{\pi}{2}$ avem u = 1. Atunci , $I = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+u} = \frac{\pi}{2}\ln 2$	1 p
TOTAL	7 p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.ro
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro