

**OLIMPIADA DE MATEMATICA****FAZA LOCALĂ**

18 februarie 2012

Clasa a - IX – a

SUBIECTUL 1

Să se afle cel mai mic număr real x astfel încât $[x] = -20\{x\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului x .

Prof. Manuela Stroie, prof. Iulian Stroie

SUBIECTUL 2

Fie $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |x-n| + |x+n| \leq 2n\}, n \in \mathbb{R}$.

- Să se determine mulțimea A_n .
- Să se determine $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{100}$

Prof. Aurelia Stanciu

SUBIECTUL 3

Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Arătați că :

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq 1$$

Prof. Florin Nicolaescu

SUBIECTUL 4

Triunghiul ABC are latura AB egală cu 1. Știind că unghiurile A și B au 15, respectiv 60 de grade, determinați lungimile celorlalte laturi fără, a utiliza trigonometria.

G.M. (Supliment cu exerciții – Aprilie 2011)

NOTĂ :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7


OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - X – a

SUBIECTUL 1

 Să se rezolve ecuația $4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x + 25^x = 2 \cdot 10^x + 2 \cdot 15^x$

Prof. Manuela Stroie, prof. Iulian Stroie

SUBIECTUL 2

Să se rezolve ecuația :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2) + \log_{\frac{1}{3}}(|x| + 1) + (x^2 + 2)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 0$$

Prof. George Netu – Lic. “Tudor Vladimirescu”

SUBIECTUL 3

Fie $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $a, b \in \{-1; 1\}$ și $x_n = a^n + b^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că

$$(x_{2n} + x_{8n})(x_{3n} + x_{5n}) = (x_n + x_{7n})(x_{4n} + x_{6n}), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

G.M. Nr 1/2011

SUBIECTUL 4

Dacă a, b, c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic cu diagonala de lungime 1, să se arate că :

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c + (a + b + c) \ln(a + b + c) \leq 0.$$

Prof. Florin Nicolaescu

NOTĂ :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18 februarie 2012
Clasa a - XI – a

SUBIECTUL 1

Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^{2012} = O_2$. Arătați că $A^{2011} = O_2$.

Prof. Manuela Stroie, prof. Iulian Stroie

SUBIECTUL 2

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 + B^2) = 0$. Să se arate că $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Prof. Florin Nicolaescu

SUBIECTUL 3

Știind că există, este finită și nenulă, să se calculeze :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n \sqrt[n]{n} + b)^{\frac{n}{\ln n}}$$

G.M. Nr. 2/ 2011

SUBIECTUL 4

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}$; $a \in \mathbb{R}$ și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $a_n = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n)$

a) Exprimați a_n sub o formă mai simplă.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{3a_2} + \dots + \frac{1}{(n+1)a_n} \right)$

Prof. Aurelia Stanciu

NOTĂ :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.


OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - XII – a

SUBIECTUL 1

 Sa se arate ca $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$.

Prof. Radulescu Valentin

SUBIECTUL 2

Să se arate că :

 a) Pe mulțimea $G = (-1 ; 1)$ se poate defini operația algebrică

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

 iar $(G ; *)$ este un grup abelian .

 b) Funcția $f : (-1 ; 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ este un izomorfism între grupul $(G ; *)$

 și grupul $(\mathbb{R} ; +)$.

 c) Grupul $(G ; *)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^* ; \cdot)$.

SUBIECTUL 3

 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea :

$$\int_0^1 f(nax) dx = 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } a \in \mathbb{R}^*.$$

 Arătați că f este identic nulă.

Prof. Chiriță Aurel C.N.I.Minulescu

SUBIECTUL 4

 Să se calculeze : $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{1}{1 + \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}} dx$

G.M. Nr. 4/2011

NOTĂ :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.