OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA

18 februarie 2012
BAREM DE CORECTARE
CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

$5^a \cdot 2^{2a+1} + 2 \cdot \overline{ab} + 5 \cdot 2^c = 863 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}\right) + 5 \cdot 2^c = 863$ 1p

Avem: $2 \cdot \left(5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}\right)$ număr par, 863 număr impar $\Rightarrow 5 \cdot 2^c$ număr impar

$\Rightarrow c = 0$ 2p

$\Rightarrow 2 \cdot \left(5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}\right) + 5 = 863 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}\right) = 858$ 1p

$\Rightarrow \left(5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}\right) = 429 \Leftrightarrow 5^a \cdot 4^a + \overline{ab} = 429$ 1p

$\Rightarrow 20^a + \overline{ab} = 429$ 1p

Deoarece $0 < \overline{ab} < 100 \Rightarrow 329 < 20^a < 429 \Rightarrow a = 2$ şi $b = 9$

Deci, $a = 2$, $b = 9$ şi $c = 0$. 1p

SUBIECTUL 2

a) 4x număr par, 61 număr impar$\Rightarrow$ 5y număr impar, cum 5 e impar$\Rightarrow$y impar.............0,5 p

$5y \leq 61$ şi y impar$\Rightarrow$ $y \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 1p

$(x, y) \in \{(14,1);(9,5);(4,9)\}$ 1p

Cea mai mică valoare $14 \cdot 1 = 14$ 0,5p

Cea mai mare valoare $9 \cdot 5 = 45$ 0,5p

Suma cerută:14+45=59 ....0,5p

b) n=6x+y , y<6, n=11y+x , x<11$\Rightarrow$ 6x+y=11y+x$\Rightarrow$ x=2y 1p

y, $x \neq 0$, $y < 6 \Rightarrow y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 1p

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2,\ n=13 \\ y=2 \Rightarrow x=4,\ n=26 \\ y=3 \Rightarrow x=6,\ n=39 \\ y=4 \Rightarrow x=8,\ n=52 \\ y=5 \Rightarrow x=10,\ n=65 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Numerele căutate sunt 13, 26, 39, 52, 65}$$ 1p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

SUBIECTUL 3

Notăm cu x numărul elevilor din prima grupă, y numărul elevilor din a doua grupă şi z numărul elevilor din a treia grupă.
Înmulțind cu 2 egalitatea x + y + z = 30 obținem 2x + 2y + 2z = 60 (1).
Pe de altă parte, 15x + 6y + 2z = 150 (2). 1p

Scăzând (1) din (2) obținem 13x + 4y = 90...1p

I. x = 2 ⇒ 4y = 64 ⇒ y = 16. Înlocuind în (1) găsim z = 12..................................2p

II. x = 6 ⇒ 4y = 12 ⇒ y = 3. Înlocuind în (1) găsim z = 21...................................2p

$S=\{(2,16,12);(6,3,21)\}$ 1p

SUBIECTUL 4

Membrul drept este impar $\Rightarrow$ cel putin unul din termenii membrului stâng este impar, adică egal cu 1..1p
Dacă, de exemplu, $2^{a+b}=1$ atunci a+b=0 si cum numerele a si b sunt naturale, rezultă că a=b=0...1p
Relația din ipoteza devine $2^c+2^d+2^{c+d}=24$ 1p
Studiul ordinului de mărime ne dă 2^c, $2^d\in\{1;2;4;8;16\}$ 1p
Dintre toate valorile de mai sus convin numai c=d=2...1p
Deci a+b+c+d=4... 1p
Pentru orice alegere a termenului egal cu 1(din membrul stâng avem)a+b+c+d=4.............. 1p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA

18 februarie 2012
BAREM DE CORECTARE
CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Din 16x-6y=80z $\Rightarrow$ 8(x-5z)=3y $\Leftrightarrow 8/y$ (1)……………………………………………………………2 p
16x-6y=80z $\Rightarrow$ 9x-9y+(7x+3y-8z)=8 $\cdot$ 9z $\Leftrightarrow 9/(7x+3y-8z)$ (2)…………………………………2 p
(8, 9)=1……………………………………………………………………………………………1 p
Folosind relațiile (1) şi (2) avem $72/y\cdot(7x+3y-8z)$ ……………………………………………2 p

SUBIECTUL 2

Din $ac-ab=3 \Rightarrow a(c-b)=3, c-b>0 \Rightarrow a|3 \Rightarrow a\in\{1;3\}$ ……………………………………2p
Cazul I.
Fie a=1, dar $a(c-b)=3 \Rightarrow c-b=3 \Rightarrow \mathrm{c}=\mathrm{b}+3$
Din $bc-ba=8 \Rightarrow b(c-a)=8$, dar $a=1 \Rightarrow b(c-1)=8$, dar
$\mathrm{c}=\mathrm{b}+3 \Rightarrow \mathrm{b}(\mathrm{b}+2)=8 \Rightarrow b=2, c=5$.
Deci $\overline{abc}=125$ ……………………………………………………………………………2p
Cazul II.
Fie a=3, dar $a(c-b)=3 \Rightarrow c-b=1 \Rightarrow \mathrm{c}=\mathrm{b}+1$
Din $bc-ba=8 \Rightarrow b(c-a)=8$, dar $a=3 \Rightarrow b(c-3)=8$, dar
$\mathrm{c}=\mathrm{b}+1 \Rightarrow \mathrm{b}(\mathrm{b}-2)=8 \Rightarrow b=4, c=5$.
Deci $\overline{abc}=345$ ……………………………………………………………………………2p
Avem $\overline{abc}\in\{125,345\}$ ………………………………………………………………………1p

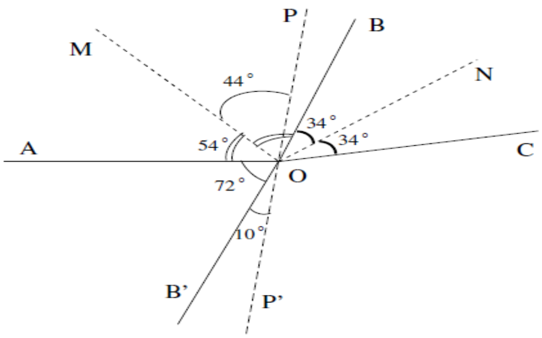
SUBIECTUL 3

a)[OE bisectoarea <BOC=> m(<BOE)=m(<EOC)………………………………………………… 1 p
[ON bisectoarea <AOC=>m(<AON)=m(<CON)=60°+m(<EOC)…………………………… 1 p
m(<EON)=m(<NOC)—m(<EOC)=60°(constant)……………………………………………1 p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

b) Dacă $m(<AOB)+m(<BOC)< 180^\circ$..1 p
$m(<BOC) + m(<AOD)=60^\circ$...1 p
$m(<AOD)=24^\circ, m(<BOC)=36^\circ$ şi $m(<BOD)=144^0$..1 p
Dacă $m(<AOB)+ m(<BOC)>180^\circ$ obținem , $m(<BOC)=180^\circ$, contradicție..........................1 p

SUBIECTUL 4



$m(\sphericalangle AOP') = 180^0 - m(\sphericalangle AOP) = 180^0 - [m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOP)] =$

$=180^0 - (54^0 + 44^0) = 180^0 - 98^0 = 82^0$ 3p
$m(\sphericalangle AOB') = m(\sphericalangle AOP') - m(\sphericalangle B'OP') = 72^0$ 1p
$m(\sphericalangle BOB') = m(\sphericalangle BOP) + m(\sphericalangle POM) + m(\sphericalangle MOA) + m(\sphericalangle AOB') =$
$= 10^0 + 44^0 + 54^0 + 72^0 = 180^0$ 2p
Deci punctele B, O, B' sunt coliniare..1p
Sau
B si B' sunt în semiplane opuse...2p
$m(\sphericalangle POB) = 10^0 = m(\sphericalangle P'OB')$, deci unghiurile sunt opuse la vârf...................................3p
Semidreptele $[OB$ si $[OB'$ sunt opuse, deci B, O, B' sunt coliniare......................................2p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA

18 februarie 2012
BAREM DE CORECTARE
CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) $x, y>0$ şi $y>x \Rightarrow \sqrt{x\cdot y}>\sqrt{x\cdot x}=x \Rightarrow \left(\sqrt{x\cdot y}\right)^{-1}<\frac{1}{x}$ 1p

x, y>0 şi $y>x \Rightarrow \sqrt{x\cdot y}<\sqrt{y\cdot y}=y \Rightarrow \left(\sqrt{x\cdot y}\right)^{-1}>\frac{1}{y}$ 1p

Deci $\frac{1}{x}>\left(\sqrt{x\cdot y}\right)^{-1}>\frac{1}{y}$ sau $\frac{1}{y}<\left(\sqrt{x\cdot y}\right)^{-1}<\frac{1}{x}$ 1p

b) Notăm $a=\left(2\sqrt{5}\right)^{-1}+\left(\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^{-1}+\frac{1}{\sqrt{42}}$

$a=\left(\sqrt{20}\right)^{-1}+\left(\sqrt{30}\right)^{-1}+\left(\sqrt{42}\right)^{-1}=\left(\sqrt{4\cdot 5}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5\cdot 6}\right)^{-1}+\left(\sqrt{6\cdot 7}\right)^{-1}$ 1p

Conform a)$\Rightarrow \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<a<\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{107}{210}<a<\frac{74}{120}$ 1p

Cum $\frac{107}{210}>\frac{105}{210}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{74}{120}<\frac{75}{120}=\frac{5}{8}$ 1p

Obținem $\frac{1}{2}<\left(2\sqrt{5}\right)^{-1}+\left(\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^{-1}+\frac{1}{\sqrt{42}}<\frac{5}{8}$ 1p

SUBIECTUL 2

Fie triunghiul ABC, unde (AD este bisectoarea unghiului BAC, $D\in(BC)$.

Notăm $m(\measuredangle ADB)=x$, $m(\measuredangle ADC)=y \Rightarrow \{x,y\}$ $i.p.$ $\{0,25;0,2\}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{x+y}{9}=\frac{180^0}{9}=20^0$ 1p

Din $\frac{x}{4}=20^0 \Rightarrow x=80^0$ 0,5p

Din $\frac{y}{5}=20^0 \Rightarrow y=100^0$ 0,5p

$m(\measuredangle B)+m(\measuredangle ADB)+m(\measuredangle BAD)=m(\measuredangle C)+m(\measuredangle ADC)+m(\measuredangle CAD)=180^0$ 1p

Dar $m(\measuredangle BAD)=m(\measuredangle CAD)\Rightarrow m(\measuredangle B)+80^0=m(\measuredangle C)+100^0$

$\Rightarrow m(\measuredangle B)-m(\measuredangle C)=20^0$ (1) 1p

Din $\dfrac{m(\measuredangle C)}{m(\measuredangle B)}=\dfrac{7}{11}\Rightarrow m(\measuredangle B)=\dfrac{11\cdot m(\measuredangle C)}{7}$ (2) 1p

Din relațiile (1) şi (2) $\Rightarrow \dfrac{11}{7}\cdot m(\measuredangle C)-m(\measuredangle C)=20^0 \Leftrightarrow 4\cdot m(\measuredangle C)=140^0$

$\Rightarrow m(\measuredangle C)=35^0, m(\measuredangle B)=55^0$ (3). 1p

Cum $m(\measuredangle B)+m(\measuredangle C)=90^0\Rightarrow m(\measuredangle A)=90^0$,

deci **triunghiul este dreptunghic**. 1p

SUBIECTUL 3

$\Delta BME\equiv\Delta CMF\Rightarrow EB\equiv CF\Rightarrow DF=5BE$ 2p

$\Delta TAE\sim\Delta TDF\Rightarrow \dfrac{TA}{TD}=\dfrac{AE}{DF}=\dfrac{3BE}{5BE}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow \dfrac{A_{\Delta TAE}}{A_{\Delta TDF}}=\dfrac{9}{25}$ 2p

$\dfrac{A_{\Delta ATE}}{A_{ADFE}}=\dfrac{9}{16}$ şi

$A_{ADFE}=A_{ADCME}+A_{\Delta CMF}=A_{ADCME}+A_{\Delta BME}=A_{ABCD}=32cm^2$ 2p

$A_{\Delta ATE}=18cm^2$. 1p

SUBIECTUL 4

$P_n=6^{1575}\Rightarrow n=6^k,\ k\in\mathbb{N}$ 1p

$P_{6^k}=\left(2^0\cdot3^0\cdot2^0\cdot3^1\cdot2^0\cdot3^2\cdot\ldots\cdot2^0\cdot3^k\right)\cdot\left(2^1\cdot3^0\cdot2^1\cdot3^1\cdot2^1\cdot3^2\cdot\ldots\cdot2^1\cdot3^k\right)\cdot\ldots\cdot\left(2^k\cdot3^0\cdot2^k\cdot3^1\cdot2^k\cdot3^2\cdot\ldots\cdot2^k\cdot3^k\right)$

$P_{6^k}=6^{\frac{k(k+1)^2}{2}}$ 3p

Deci, $6^{1575}=6^{\frac{k(k+1)^2}{2}}\Leftrightarrow k(k+1)^2=3150=14\cdot15^2\Rightarrow k=14$ 2p

$n=6^{14}$ 1p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA

18 februarie 2012

BAREM DE CORECTARE
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

a) $x^4+1<\sqrt{x^8+3x^4+3}<x^4+2$ 1p

x^8+3x^4+3 este cuprins între două pătrate consecutive........ 1p

$\sqrt{x^8+3x^4+3}\notin\mathbb{Z}$ 1p

b) $\sqrt{n^4+n^2+26}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n^4+n^2+26=k^2,\ k\in\mathbb{N}$ 1p

$4n^4+4n^2+104=4k^2\Leftrightarrow\left(2n^2+1\right)^2+103=\left(2k\right)^2$ 1p

$\left(2k+2n^2+1\right)\cdot\left(2k-2n^2-1\right)=103\Leftrightarrow\begin{cases}2k+2n^2+1=103\\2k-2n^2-1=1\end{cases}$ 1p

$k=26\in\mathbb{N},\ n=5\in\mathbb{N}$ 1p

SUBIECTUL 2

$\left(a-\sqrt{2012}\right)\cdot\left(a+\sqrt{2012}\right)+\sqrt{2010}\cdot b\cdot(2\cdot a+\sqrt{2010}\cdot b)=2011\cdot c^2$

$\Leftrightarrow a^2+2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{2010}+2010\cdot b^2-2011\cdot c^2=2012$ 1p

$\Leftrightarrow\left(a+\sqrt{2010}\cdot b\right)^2-\left(\sqrt{2011}\cdot c\right)^2=2012$ 2p

$\Leftrightarrow\left(a+\sqrt{2010}\cdot b+\sqrt{2011}\cdot c\right)\cdot\left(a+\sqrt{2010}\cdot b-\sqrt{2011}\cdot c\right)=2012$ 2p

$a+\sqrt{2010}\cdot b-\sqrt{2011}\cdot c=2$ număr prim........ 2p

SUBIECTUL 3

a) $A_{\Delta NOM}=A_{ACNM}-A_{\Delta AOM}-A_{\Delta CON}=\left(120-24-36\right)\text{cm}^2=60\text{cm}^2$ 1p

b) MO $\perp$ BD(teorema celor trei perpendiculare) şi MO=10 cm........ 1p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro

c) $BD \perp AC$, $BD \perp AM \Rightarrow BD \perp (AMC)$..1p

d) Fie $ME \parallel AC$, $E \in CN$, $tg(\measuredangle NME) = \frac{1}{3}$ 1p

e) $\measuredangle((MBD),(BON)) = \measuredangle MON$, $MO \perp BD$, $NO \perp BD$ 1p

$NO = 6\sqrt{5}$ cm, $MO = 10$ cm 1p

$A_{\Delta NOM} = \frac{OM \cdot ON \cdot \sin(\measuredangle MON)}{2} \Leftrightarrow \sin(\measuredangle MON) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 1p

SUBIECTUL 4

a) $SA \perp (ABC)$, $BD \subset (ABC)$, rezultă că $SA \perp BD$..0,5p
Avem $AC \perp BD$(ABCD pătrat)$\Rightarrow BD \perp (SAC)$. Dar $SC \subset (SAC)$, deci $BD \perp SC$.........1p

b) Fie O centrul pătratului ABCD. În ΔSAC construim $OQ \perp SC$, $Q \in SC$ şi demonstrăm că $OQ \perp BD$, deci OQ va fi perpendiculara comună celor două drepte. 0,5p
Ştim că $BD \perp (SAC)$, $OQ \subset (SAC) \Rightarrow OQ \perp BD$ 0,5p

$\Delta OQC \sim \Delta SAC \Rightarrow OQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ 1p

c)Construim $AT \perp BM$, $T \in BM$;
Cum $SA \perp (ABC)$ din teorema celor trei perpendiculare$\Rightarrow ST \perp BM$,
deci $d(S, BM) = ST$ 1p

$A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} A_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$, iar $BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$..1p

$\Rightarrow AT = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ 1p

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul SAT, calculăm $ST = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$ 0,5p

Str. Ecaterina Teodoroiu nr. 8B,
230053, Slatina, jud. Olt
Tel: 0249 410927
Fax: 0249 412801
http//:isjolt.ot.edu.
e-mail: secretariat@isjolt.ot.edu.ro