

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA

18 februarie 2012

BAREM DE CORECTARE

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

$$5^a \cdot 2^{2a+1} + 2 \cdot \overline{ab} + 5 \cdot 2^c = 863 \Leftrightarrow 2 \cdot (5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}) + 5 \cdot 2^c = 863 \dots\dots\dots 1p$$

Avem: $2 \cdot (5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab})$ număr par, 863 număr impar $\Rightarrow 5 \cdot 2^c$ număr impar

$$\Rightarrow c = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}) + 5 = 863 \Leftrightarrow 2 \cdot (5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}) = 858 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow (5^a \cdot 2^{2a} + \overline{ab}) = 429 \Leftrightarrow 5^a \cdot 4^a + \overline{ab} = 429 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow 20^a + \overline{ab} = 429 \dots\dots\dots 1p$$

Deoarece $0 < \overline{ab} < 100 \Rightarrow 329 < 20^a < 429 \Rightarrow a = 2$ și $b = 9$

Deci, $a = 2$, $b = 9$ și $c = 0$. $\dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 2

a) $4x$ număr par, 61 număr impar $\Rightarrow 5y$ număr impar, cum 5 e impar $\Rightarrow y$ impar $\dots\dots\dots 0,5 p$

$5y \leq 61$ și y impar $\Rightarrow y \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \dots\dots\dots 1p$

$(x, y) \in \{(14,1);(9,5);(4,9)\} \dots\dots\dots 1p$

Cea mai mică valoare $14 \cdot 1 = 14 \dots\dots\dots 0,5p$

Cea mai mare valoare $9 \cdot 5 = 45 \dots\dots\dots 0,5p$

Suma cerută: $14+45=59 \dots\dots\dots 0,5p$

b) $n=6x+y$, $y < 6$, $n=11y+x$, $x < 11 \Rightarrow 6x+y=11y+x \Rightarrow x=2y \dots\dots\dots 1p$

$y, x \neq 0, y < 6 \Rightarrow y \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \dots\dots\dots 1p$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2, n = 13 \\ y = 2 \Rightarrow x = 4, n = 26 \\ y = 3 \Rightarrow x = 6, n = 39 \\ y = 4 \Rightarrow x = 8, n = 52 \\ y = 5 \Rightarrow x = 10, n = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Numerele căutate sunt } 13, 26, 39, 52, 65 \dots\dots\dots 1p$$

**SUBIECTUL 3**

Notăm cu x numărul elevilor din prima grupă, y numărul elevilor din a doua grupă și z numărul elevilor din a treia grupă.

Înmulțind cu 2 egalitatea $x + y + z = 30$ obținem $2x + 2y + 2z = 60$ (1).

Pe de altă parte, $15x + 6y + 2z = 150$ (2). 1p

Scăzând (1) din (2) obținem $13x + 4y = 90$ 1p

I. $x = 2 \Rightarrow 4y = 64 \Rightarrow y = 16$. Înlocuind în (1) găsim $z = 12$ 2p

II. $x = 6 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3$. Înlocuind în (1) găsim $z = 21$ 2p

$S = \{(2, 16, 12); (6, 3, 21)\}$ 1p

SUBIECTUL 4

Membrul drept este impar \Rightarrow cel puțin unul din termenii membrului stâng este impar, adică egal cu 1..... 1p

Dacă, de exemplu, $2^{a+b} = 1$ atunci $a+b=0$ și cum numerele a și b sunt naturale, rezultă că $a=b=0$ 1p

Relația din ipoteza devine $2^c + 2^d + 2^{c+d} = 24$ 1p

Studiul ordinului de mărime ne dă $2^c, 2^d \in \{1; 2; 4; 8; 16\}$ 1p

Dintre toate valorile de mai sus convin numai $c=d=2$ 1p

Deci $a+b+c+d=4$ 1p

Pentru orice alegere a termenului egal cu 1 (din membrul stâng avem) $a+b+c+d=4$ 1p

**OLIMPIADA DE MATEMATICA
 FAZA LOCALA**

 18 februarie 2012
 BAREM DE CORECTARE
 CLASA a VI-a
SUBIECTUL 1

Din $16x - 6y = 80z \Rightarrow 8(x - 5z) = 3y \Leftrightarrow 8/y$ (1).....2 p
 $16x - 6y = 80z \Rightarrow 9x - 9y + (7x + 3y - 8z) = 8 \cdot 9z \Leftrightarrow 9/(7x + 3y - 8z)$ (2).....2 p
 $(8, 9) = 1$1 p
 Folosind relațiile (1) și (2) avem $72/y \cdot (7x + 3y - 8z)$ 2 p

SUBIECTUL 2

Din $ac - ab = 3 \Rightarrow a(c - b) = 3, c - b > 0 \Rightarrow a|3 \Rightarrow a \in \{1; 3\}$2p

Cazul I.

Fie $a=1$, dar $a(c - b) = 3 \Rightarrow c - b = 3 \Rightarrow c = b + 3$ Din $bc - ba = 8 \Rightarrow b(c - a) = 8$, dar $a = 1 \Rightarrow b(c - 1) = 8$, dar $c = b + 3 \Rightarrow b(b + 2) = 8 \Rightarrow b = 2, c = 5$.Deci $\overline{abc} = 125$ 2p

Cazul II.

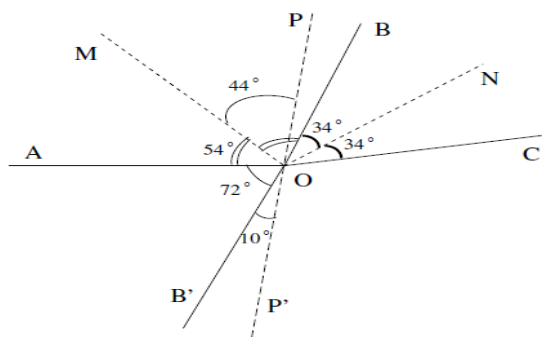
Fie $a=3$, dar $a(c - b) = 3 \Rightarrow c - b = 1 \Rightarrow c = b + 1$ Din $bc - ba = 8 \Rightarrow b(c - a) = 8$, dar $a = 3 \Rightarrow b(c - 3) = 8$, dar $c = b + 1 \Rightarrow b(b - 2) = 8 \Rightarrow b = 4, c = 5$.Deci $\overline{abc} = 345$ 2pAvem $\overline{abc} \in \{125, 345\}$ 1p**SUBIECTUL 3**

a)[OE bisectoarea $\angle BOC \Rightarrow m(\angle BOE) = m(\angle EOC)$ 1 p
 [ON bisectoarea $\angle AOC \Rightarrow m(\angle AON) = m(\angle CON) = 60^\circ + m(\angle EOC)$ 1 p
 $m(\angle EON) = m(\angle NOC) - m(\angle EOC) = 60^\circ$ (constant).....1 p



- b) Dacă $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) < 180^\circ$ 1 p
 $m(\angle BOC) + m(\angle AOD) = 60^\circ$ 1 p
 $m(\angle AOD) = 24^\circ, m(\angle BOC) = 36^\circ$ și $m(\angle BOD) = 144^\circ$ 1 p
 Dacă $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) > 180^\circ$ obținem, $m(\angle BOC) = 180^\circ$, contradicție 1 p

SUBIECTUL 4



$$m(\angle AOP') = 180^\circ - m(\angle AOP) = 180^\circ - [m(\angle AOM) + m(\angle MOP)] =$$

$$= 180^\circ - (54^\circ + 44^\circ) = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ \dots\dots\dots 3p$$

$$m(\angle AOB') = m(\angle AOP') - m(\angle B'OP') = 72^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle BOB') = m(\angle BOP) + m(\angle POM) + m(\angle MOA) + m(\angle AOB') =$$

$$= 10^\circ + 44^\circ + 54^\circ + 72^\circ = 180^\circ \dots\dots\dots 2p$$

Deci punctele B, O, B' sunt coliniare 1p

Sau

B și B' sunt în semiplane opuse 2p

$m(\angle POB) = 10^\circ = m(\angle P'OB')$, deci unghiurile sunt opuse la vârf 3p

Semidreptele $[OB$ și $[OB'$ sunt opuse, deci B, O, B' sunt coliniare 2p

**OLIMPIADA DE MATEMATICA
 FAZA LOCALA**

18 februarie 2012

BAREM DE CORECTARE

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

$$\text{a) } x, y > 0 \text{ și } y > x \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} > \sqrt{x \cdot x} = x \Rightarrow (\sqrt{x \cdot y})^{-1} < \frac{1}{x} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$x, y > 0 \text{ și } y > x \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} < \sqrt{y \cdot y} = y \Rightarrow (\sqrt{x \cdot y})^{-1} > \frac{1}{y} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Deci } \frac{1}{x} > (\sqrt{x \cdot y})^{-1} > \frac{1}{y} \text{ sau } \frac{1}{y} < (\sqrt{x \cdot y})^{-1} < \frac{1}{x} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{b) Notăm } a = (2\sqrt{5})^{-1} + \left(\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^{-1} + \frac{1}{\sqrt{42}}$$

$$a = (\sqrt{20})^{-1} + (\sqrt{30})^{-1} + (\sqrt{42})^{-1} = (\sqrt{4 \cdot 5})^{-1} + (\sqrt{5 \cdot 6})^{-1} + (\sqrt{6 \cdot 7})^{-1} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Conform a) } \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < a < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{107}{210} < a < \frac{74}{120} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Cum } \frac{107}{210} > \frac{105}{210} = \frac{1}{2} \text{ și } \frac{74}{120} < \frac{75}{120} = \frac{5}{8} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Obținem } \frac{1}{2} < (2\sqrt{5})^{-1} + \left(\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^{-1} + \frac{1}{\sqrt{42}} < \frac{5}{8} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

SUBIECTUL 2Fie triunghiul ABC, unde (AD este bisectoarea unghiului BAC, $D \in (BC)$).Notăm $m(\angle ADB) = x$, $m(\angle ADC) = y \Rightarrow \{x, y\}$ i.p. $\{0, 25; 0, 2\}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Din } \frac{x}{4} = 20^\circ \Rightarrow x = 80^\circ \dots\dots\dots 0,5\text{p}$$

$$\text{Din } \frac{y}{5} = 20^\circ \Rightarrow y = 100^\circ \dots\dots\dots 0,5\text{p}$$



$$m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle ADB) + m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle ADC) + m(\sphericalangle CAD) = 180^0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle CAD) \Rightarrow m(\sphericalangle B) + 80^0 = m(\sphericalangle C) + 100^0$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C) = 20^0 \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } \frac{m(\sphericalangle C)}{m(\sphericalangle B)} = \frac{7}{11} \Rightarrow m(\sphericalangle B) = \frac{11 \cdot m(\sphericalangle C)}{7} \quad (2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din relațiile (1) și (2) } \Rightarrow \frac{11}{7} \cdot m(\sphericalangle C) - m(\sphericalangle C) = 20^0 \Leftrightarrow 4 \cdot m(\sphericalangle C) = 140^0$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle C) = 35^0, m(\sphericalangle B) = 55^0 \quad (3). \dots\dots\dots 1p$$

Cum $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 90^0 \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 90^0$,
deci **triunghiul este dreptunghic**. $\dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 3

$$\Delta BME \cong \Delta CMF \Rightarrow EB \cong CF \Rightarrow DF = 5BE \dots\dots\dots 2p$$

$$\Delta TAE \sim \Delta TDF \Rightarrow \frac{TA}{TD} = \frac{AE}{DF} = \frac{3BE}{5BE} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{A_{\Delta TAE}}{A_{\Delta TDF}} = \frac{9}{25} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{A_{\Delta ATE}}{A_{ADFE}} = \frac{9}{16} \text{ și}$$

$$A_{ADFE} = A_{ADCME} + A_{\Delta CMF} = A_{ADCME} + A_{\Delta BME} = A_{ABCD} = 32cm^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$A_{\Delta ATE} = 18cm^2 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4

$$P_n = 6^{1575} \Rightarrow n = 6^k, k \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$$

$$P_{6^k} = (2^0 \cdot 3^0 \cdot 2^0 \cdot 3^1 \cdot 2^0 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 2^0 \cdot 3^k) \cdot (2^1 \cdot 3^0 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 2^1 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 2^1 \cdot 3^k) \cdot \dots \cdot (2^k \cdot 3^0 \cdot 2^k \cdot 3^1 \cdot 2^k \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 2^k \cdot 3^k)$$

$$P_{6^k} = 6^{\frac{k(k+1)^2}{2}} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Deci, } 6^{1575} = 6^{\frac{k(k+1)^2}{2}} \Leftrightarrow k(k+1)^2 = 3150 = 14 \cdot 15^2 \Rightarrow k = 14 \dots\dots\dots 2p$$

$$n = 6^{14} \dots\dots\dots 1p$$

**OLIMPIADA DE MATEMATICA
 FAZA LOCALA**

18 februarie 2012

 BAREM DE CORECTARE
 CLASA a VIII-a
SUBIECTUL 1

- a) $x^4 + 1 < \sqrt{x^8 + 3x^4 + 3} < x^4 + 2$ 1p
 $x^8 + 3x^4 + 3$ este cuprins între două pătrate consecutive. 1p
 $\sqrt{x^8 + 3x^4 + 3} \notin \mathbb{Z}$ 1p
 b) $\sqrt{n^4 + n^2 + 26} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n^4 + n^2 + 26 = k^2, k \in \mathbb{N}$ 1p
 $4n^4 + 4n^2 + 104 = 4k^2 \Leftrightarrow (2n^2 + 1)^2 + 103 = (2k)^2$ 1p
 $(2k + 2n^2 + 1) \cdot (2k - 2n^2 - 1) = 103 \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 2n^2 + 1 = 103 \\ 2k - 2n^2 - 1 = 1 \end{cases}$ 1p
 $k = 26 \in \mathbb{N}, n = 5 \in \mathbb{N}$ 1p

SUBIECTUL 2

$$(a - \sqrt{2012}) \cdot (a + \sqrt{2012}) + \sqrt{2010} \cdot b \cdot (2 \cdot a + \sqrt{2010} \cdot b) = 2011 \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2010} + 2010 \cdot b^2 - 2011 \cdot c^2 = 2012$$
 1p
$$\Leftrightarrow (a + \sqrt{2010} \cdot b)^2 - (\sqrt{2011} \cdot c)^2 = 2012$$
 2p
$$\Leftrightarrow (a + \sqrt{2010} \cdot b + \sqrt{2011} \cdot c) \cdot (a + \sqrt{2010} \cdot b - \sqrt{2011} \cdot c) = 2012$$
 2p
$$a + \sqrt{2010} \cdot b - \sqrt{2011} \cdot c = 2$$
 număr prim 2p

SUBIECTUL 3

- a) $A_{\Delta NOM} = A_{\Delta CNM} - A_{\Delta AOM} - A_{\Delta CON} = (120 - 24 - 36) \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$ 1p
 b) $MO \perp BD$ (teorema celor trei perpendiculare) și $MO = 10 \text{ cm}$ 1p



c) $BD \perp AC, BD \perp AM \Rightarrow BD \perp (AMC)$1p

d) Fie $ME \parallel AC, E \in CN, \operatorname{tg}(\angle NME) = \frac{1}{3}$ 1p

e) $\angle((MBD), (BON)) = \angle MON, MO \perp BD, NO \perp BD$ 1p

$NO = 6\sqrt{5}$ cm, $MO = 10$ cm1p

$$A_{\Delta NOM} = \frac{OM \cdot ON \cdot \sin(\angle MON)}{2} \Leftrightarrow \sin(\angle MON) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4

a) $SA \perp (ABC), BD \subset (ABC)$, rezultă că $SA \perp BD$0,5p
 Avem $AC \perp BD$ (ABCD pătrat) $\Rightarrow BD \perp (SAC)$. Dar $SC \subset (SAC)$, deci $BD \perp SC$1p

b) Fie O centrul pătratului ABCD. În ΔSAC construim $OQ \perp SC, Q \in SC$ și demonstrăm că $OQ \perp BD$, deci OQ va fi perpendiculara comună celor două drepte.0,5p
 Știm că $BD \perp (SAC), OQ \subset (SAC) \Rightarrow OQ \perp BD$ 0,5p

$$\Delta OQC \sim \Delta SAC \Rightarrow OQ = \frac{a\sqrt{6}}{6} \dots\dots\dots 1p$$

c) Construim $AT \perp BM, T \in BM$;

Cum $SA \perp (ABC)$ din teorema celor trei perpendiculare $\Rightarrow ST \perp BM$,

deci $d(S, BM) = ST$ 1p

$$A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} A_{ABCD} = \frac{a^2}{2}, \text{ iar } BM = \frac{a\sqrt{5}}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow AT = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \dots\dots\dots 1p$$

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul SAT, calculăm $ST = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$ 0,5p