Concurs RMCS , ediția a VII a, 17 martie 2012, Oțelu – Roşu

RMCS

Clasa a IX a

1. a) Arătați că, pentru orice număr real pozitiv x şi orice număr natural n , este adevărată inegalitatea $n \cdot [x] \le [nx]$,

b) Determinați toate numerele reale pozitive x pentru care $[x],\ 2 \cdot [x]$ şi $[2x]$ sunt numere naturale consecutive.

Articol RMCS 25

2. Determinați numerele reale a pentru care există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$\begin{cases} x^2 - xy = a \\ 2y^2 + xy = a^2 \end{cases}.$$

RMCS 24

3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că dacă $\dfrac{x+y}{3} \in \mathbb{Z}^*$, atunci are loc relația

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \ \forall x, y \in \mathbb{Z}^* .$$

Olimpiadă Iran

4. Se consideră un triunghi ABC şi cevienele *AD, BE, CF* concurente în *P*.

Stabiliți poziția punctului *P* dacă $\dfrac{PA^2}{PD^2} + \dfrac{PB^2}{PE^2} + \dfrac{PC^2}{PF^2} = 12$.

RMCS 16

Notă: Timp de lucru : trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a VII a, 17 martie 2012, Oțelu – Roşu , Barem

Clasa a IX a

Problema 1	
a) $\left[nx\right]=\left[n\left[x\right]+n\left\{x\right\}\right]=n\left[x\right]+\left[n\left\{x\right\}\right]\geq n\left[x\right]$.	**3p**
b) Pentru $x>0$ avem aşadar $\left[x\right]\leq 2\left[x\right]\leq\left[2x\right]$;	**1p**
deoarece $\left[2x\right]-2\left[x\right]\in\left\{0,1\right\}$, se impune să avem $\left[2x\right]-2\left[x\right]=1$ şi astfel ajungem la $\left[2\left\{x\right\}\right]=1$,de unde $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ .Verificăm acum că toate aceste numere satisfac condiția din enunț.	**3p**
Problema 2	
Dacă $a=0\Rightarrow x=y=0\in\mathbb{Z}$;dacă $a\neq 0$,înmulțim prima ecuație cu $-a$ şi adunăm cele două ecuații,apoi împărțim ecuația obținută cu $x^2\neq 0$ .Să mai remarcăm că $x,y\in\mathbb{Z}$ conduce la $a\in\mathbb{Z}$ şi,cu notația $\frac{y}{x}=t\in\mathbb{Q}$ avem $2t^2+(a+1)t-a=0$ .Această ecuație trebuie deci să aibă rădăcini raționale,deci există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\Delta=(a+5)^2-24=k^2$,de unde $(a+5-k)(a+5+k)=24$ .Analizăm cazurile posibile şi ajungem în final la $a\in\left\{-12,0,2\right\}$. □	**7p**
Problema 3	
$f(a)=f\left(\frac{a+2a}{3}\right)=\frac{f(a)+f(2a)}{2}\Rightarrow f(a)=f(2a)$	**2p**
În particular, $f(1)=f(2)=f(4)$	**1p**
$f(2)=f\left(\frac{3+3}{2}\right)=\frac{f(3)+f(3)}{2}$, aşadar $f(2)=f(3)$	**1p**
Presupunem acum că $f(k)=f(1),\forall k=1,2,...,n-1\geq 4$; luăm acum $i=1,2,3$ astfel încât $n+i\equiv 0(\bmod 3)$; cum $\frac{n+i}{3}\leq n-1$, avem $f(1)=f\left(\frac{n+i}{3}\right)=\frac{f(n)+f(i)}{2}=\frac{f(n)+f(1)}{2}$, de unde $f(n)=f(1)$	**2p**
Aşadar am demonstrat prin inducție că soluțiile problemei sunt doar funcțiile constante (verificare).	**1p**
Problema 4	
Notăm $\frac{PA}{PD}=x,\frac{PB}{PE}=y,\frac{PC}{PF}=z$ şi $\frac{FA}{FB}=m,\frac{DB}{DC}=n,\frac{EC}{EA}=p$, de unde: $x=m+\frac{1}{p},y=n+\frac{1}{m},z=p+\frac{1}{n}$	**3p**
$x+y+z\geq 6$	**1p**
$12=x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}\left(x+y+z\right)^2\geq 12$ conduce la $m=n=p=1$	**2p**
Aşadar P este centrul de greutate al triunghiului *ABC*.	**1p**

Notă: Orice soluție ***corectă***, diferită de cea propusă în barem, se punctează corespunzător.

Concurs RMCS , ediția a VII a, 17 martie 2012, Oțelu – Roşu

RMCS

Clasa a X a

1. Se notează cu $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x)) = x + f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

a) Arătați că $\mathcal{F}\neq\varnothing$.

b) Demonstrați că, dacă $f\in\mathcal{F}$, atunci mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)=0\}$ are un singur element.

RMCS 33

2. Arătați că, dacă numerele complexe a,b,c verifică egalitățile $|a+b|=|c|$, $|b+c|=|a|$ şi $|c+a|=|b|$, atunci $a+b+c=0$.

Articol RMCS 29

3. Rezolvați ecuația $1-2^x+2^{2x-1}=\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Lucian Dragomir

4. a) Demonstrați că, pentru orice număr real strict pozitiv *x*, este adevărată egalitatea

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

b) Rezolvați ecuația $\left(\operatorname{arctg} x\right)^3+\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)^3=\dfrac{\pi^3}{24}$.

GM 2011

Notă: Timp de lucru : trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a VII a, 17 martie 2012, Oțelu – Roşu , Barem

Clasa a X a

Problema 1.	
a) orice exemplu corect	**2p**
b) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $f(x) = f(y)$ avem: $f\left(f(x)\right) = f\left(f(y)\right) \Rightarrow x = y$, deci f este injectivă.	**2p**
Notăm $f(0) = a$ şi, pentru $x = 0$, egalitatea din enunț conduce la $f(a) = f(0) \Rightarrow a = 0$.	**2p**
Aşadar mulțimea A este nevidă şi, deoarece f este injectivă, obținem $A = \{0\}$.	**1p**
Problema 2.	
Fie punctele $A(a), B(b), C(c), M(b+c), N(a+c), P(a+b)$ şi O originea sistemului. Ipoteza devine $OA = OM$, $OB = ON$ şi $OC = OP$.	**3p**
Fie S, T, U mijloacele segmentelor AM, BN, CP. Atunci deducem că $S = T = U$ deoarece au acelaşi afix, $\dfrac{a+b+c}{2}$.	**2p**
Presupunem $S \neq O$. Dar în ΔOAM isoscel deducem $OS \perp AM$. Analog $OS \perp BN$, $OS \perp CP$ ceea ce înseamnă că am construit mai multe perpendiculare în O pe OS ceea ce nu e posibil. Rămâne atunci $S = O$ adică $a+b+c=0$.	**2p**
Problema 3	
$2\log_2 \dfrac{x+1}{x} = 2 + 2^x - 2^{x+1}$	**1p**
$2^{x+1} + 2\log_2(x+1) = 2^{2x} + 2 + 2\log_2 x$	**1p**
Împărțind cu 2, se ajunge la $2^x + \log_2(x+1) = 2^{2x-1} + \log_2(2x)$	**2p**
Considerând funcția $f : \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + \log_2(x+1)$, care este strict crescătoare, deci injectivă, egalitatea anterioară este $f(x) = f(2x-1)$, de unde $x = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$	**3p**
Problema 4.	
a) ...	**2p**
b) Se deduce că $x > 0$.	**1p**
Notăm $arctgx = a, arctg\dfrac{1}{x} = b$, de unde $a + b = \dfrac{\pi}{2}, a^3 + b^3 = \dfrac{\pi^3}{24}$ şi apoi $ab = \dfrac{\pi^2}{18}$	**1p**
$a = \dfrac{\pi}{3}, b = \dfrac{\pi}{6}$ (sau invers)	**2p**
$x \in \left\{\sqrt{3}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$	**1p**

Notă: Orice soluție ***corectă***, diferită de cea propusă în barem, se punctează corespunzător.

Concurs RMCS , ediția a VII a, 17 martie 2012, Oțelu – Roşu

RMCS

Clasa a XI a

1. a) Dați un exemplu de două matrice nenule şi distincte $A,B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $AB + BA = O_3$ şi $\det(A + B) = 0$.

b) Arătați că, dacă $X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $XY + YX = O_3$, iar $\det(X + Y) = 0$, atunci $\det(X^2 + Y^2) = 0$.

GM 2010, enunț modificat

2. Arătați că şirul definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 2}{x_n + 2}, \forall n \geq 1$, este convergent şi determinați limita sa.

RMCS 21

3. Demonstrați că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $x \in (0,+\infty)$ şi $\det(A^2 + x \cdot I_2) = 0$, atunci

$$\det(A^2 + A + x \cdot I_2) = x .$$

Vasile Pop, Cluj – Napoca

4. O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *deosebită* dacă este mărginită şi $f(0) \neq 0$.

a) Dați un exemplu de funcție discontinuă care este *deosebită.*

b) Arătați că, dacă f este o funcție continuă şi *deosebită* , atunci există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, astfel încât $x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) = 0$.

Lucian Dragomir

Notă: Timp de lucru : trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a VII a, 17 martie 2012, Oțelu – Roşu , Barem clasa a XI a

Problema 1	
a) orice exemplu corect	**3p**
b) $\left(X+Y\right)^2=\left(X+Y\right)\cdot\left(X+Y\right)=X^2+XY+YX+Y^2=X^2+Y^2$	**2p**
Se trece la determinanți şi astfel : $\det(X^2+Y^2)=\det\left(\left(X+Y\right)^2\right)=\left(\det(X+Y)\right)^2=0$.	**2p**
Problema 2	
Se demonstrează imediat că $x_n\in\left(0,2\right),\forall n\in\mathbb{N}^*$	**3p**
Se arată că şirul este strict crescător, deci convergent	**2p**
Limita cerută este 2.	**2p**
Variantă : $\left\|x_{n+1}-2\right\|=\frac{\left\|x_n-2\right\|}{\left\|x_n+2\right\|}=\frac{\left\|x_{n-1}-2\right\|}{\left\|x_n+2\right\|\cdot\left\|x_{n-1}+2\right\|}=...<\frac{1}{2^n}\to 0$	
Problema 3	
$\det(A+i\sqrt{x}I_2)\det(A-i\sqrt{x}I_2)=0$	**3p**
Dacă d este determinantul matricei, iar t urma matricei A, deduce că $d=x,t=0$	**2p**
$A^2+xI_2=O_2\Rightarrow\det(A^2+A+x\cdot I_2)=\det A=x$	**2p**
Problema 4	
a) un exemplu corect	**2p**
b)	**5p**
b) Un exemplu de soluție : f mărginită $\Rightarrow\exists m,M\in\mathbb{R},m\le f(x)\le M,\forall x\in\mathbb{R}$.	**1p**
Considerăm funcțiile continue $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=f(x)-x,h(x)=f(x)+x$ şi din $g(m)g(M)\le 0,h(m)h(M)\le 0$ deducem că $\exists x_1,x_2\in\left[m,M\right]$ astfel încât $g(x_1)=0,h(x_2)=0$,adică $f(x_1)=x_1,f(x_2)=-x_2$.	**2p**
Înmulțim aceste două egalități cu x_2 ,respectiv cu x_1 şi le adunăm.	**2p**

Notă: Orice soluție ***corectă***, diferită de cea propusă în barem, se punctează corespunzător.

Concurs RMCS , ediția a VII a, 17 martie 2012, Oțelu – Roşu

RMCS

Clasa a XII a

1. Se defineşte pe $\mathbb{R}$ o lege de compoziție "$\circ$" care verifică următoarele relații :

1) $\left(\frac{a+1}{3}\right)\circ\left(\frac{a}{2}\right)=1,\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

2) $(a\circ b)\cdot c=(a\cdot c)\circ(b\cdot c),\ \ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

Calculați $10\circ 14$.

RMCS 25

2. Determinați numărul real r pentru care $\int_0^1 \frac{x-x^3}{1+x^2+x^4+x^6}dx=\ln r$.

Lucian Dragomir

3. Arătați că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\int_{1/n}^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ este convergent.

Rodica Luca Tudorache, Iaşi

4. Se consideră un inel $(\mathcal{A},+,\cdot)$ în care există un singur element $a\in\mathcal{A}$ astfel încât $a^2=a+1$. Arătați că $1+1+1+1+1=0$.

* * *

Notă: Timp de lucru : trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a VII a, 17 martie 2012, Oțelu – Roşu ,

Clasa a XII a, Barem

Problema 1.	
Pentru $a=14$ în relația 1) se obține $5*7=1$	**4p**
Pentru $a=5, c=2, b=7$ în relația 2) se deduce $10*14=2$	**3p**
Problema 2	
$\frac{x-x^3}{1+x^2+x^4+x^6}=\frac{x}{1+x^2}-\frac{x^3}{1+x^4}$	**3p**
O primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-x^3}{1+x^2+x^4+x^6}$ este $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)$; evident, aceasta poate apărea direct în calcule...	**2p**
$r=\sqrt[4]{2}$	**2p**
Problema 3	
$a_{n+1}-a_n=\int\limits_{1/(n+1)}^{1/n}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx>0, \forall n\geq 1$, aşadar şirul este crescător	**3p**
$0<a_n<\int\limits_{1/n}^{1}\frac{x}{\sqrt{x}}dx<\frac{2}{3}$, deci şirul este şi mărginit.	**3p**
Finalizare.	**1p**
Problema 4	
Luăm $x=1-a$ şi avem $x^2-x=1-2a+a^2-1+a = a^2-a=1$.	**2p**
Din unicitatea lui a avem acum: $1-a=a \Rightarrow a+a=1$.	**2p**
Dacă luăm acum $x=1+1+1+1$, obținem $x=a+a+1+1+1=2a^2+1= 2a\cdot a+1 = 1\cdot a+1 = a+1 \Rightarrow a=1+1+1$;	**2p**
cum $a+a=1 \Rightarrow 1+1+1+1+1+1=1$ sau $1+1+1+1+1=0$ (şi se verifică soluția $x=1+1$). Problemă nu foarte uşoară!	**1p**

Notă: Orice soluție ***corectă***, diferită de cea propusă în barem, se punctează corespunzător.