**Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi**

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România** **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**

**Filiala Galaţi** **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

**Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude" , ediţia a XII-a**

**Galaţi, 5 noiembrie 2011**

***Clasa a X-a***

## *SOLUŢII*

**Problema 1.**

**Soluţie. a)** Utilizând proprietăţile logaritmilor şi inegalitatea mediilor avem succesiv:

$$\log_{\frac{1}{(a+b)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{a+b}{2}+c+d\right)^2} = \log_{(a+b)^{-2}}\left(\frac{a+b+2\cdot c+2\cdot d}{3}\right)^{-2} = \log_{(a+b)}\left(\frac{a+b+2\cdot c+2\cdot d}{3}\right) =$$

$$= \log_{(a+b)}\left(\frac{(b+c)+(c+d)+(d+a)}{3}\right) \geq \log_{a+b}\sqrt[3]{(b+c)\cdot(c+d)\cdot(d+a)}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\log_{a+b}(b+c)+\log_{a+b}(c+d)+\log_{a+b}(d+a)\right) \geq \sqrt[3]{\log_{a+b}(b+c)\cdot\log_{a+b}(c+d)\cdot\log_{a+b}(d+a)}$$ şi

încă trei inegalităţi analoage obţinute prin permutări circulare, de unde , prin înmulţirea lor membru cu membru, rezultă

$$\log_{\frac{1}{(a+b)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{a+b}{2}+c+d\right)^2}\cdot\log_{\frac{1}{(b+c)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{b+c}{2}+d+a\right)^2}\cdot\log_{\frac{1}{(c+d)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{c+d}{2}+a+b\right)^2}.\log_{\frac{1}{(d+a)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{d+a}{2}+b+c\right)^2} \geq$$

$$\geq \sqrt[3]{\Pi(\log_{a+b}(b+c)\cdot\log_{b+c}(a+b))} = 1.$$

**b)** Fie $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[k^4+k^2+1]{1+k}$. Deoarece $\sqrt[k^4+k^2+1]{1+k} > 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $x_n > n$. Pe de altă parte, din

$$\sqrt[k^4+k^2+1]{1+k} = \sqrt[k^4+k^2+1]{(1+k)\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{de\,k^4+k^2\,ori}} \leq \frac{(1+k)+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{de\,k^4+k^2\,ori}}{k^4+k^2+1} = 1+\frac{k}{k^4+k^2+1} = 1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

de unde, prin sumare, rezultă $x_n < n+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right) < n+\frac{1}{2}$, deci $x_n \in \left(n; n+\frac{1}{2}\right)$, adică $\{x_n\} < \frac{1}{2}$.

**Problema 2.**

**Soluţie a)** Fie $M$ mijlocul lui $[BC]$. Atunci:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{HC'}-\overrightarrow{HB'}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB'} = \frac{1}{2}bc\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-\frac{1}{2}cb\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right) = 0$$

deci $AM \perp B'C'$, şi analog celelalte doua mediane din $B$, respectiv $C$ ale triunghiului $ABC$ sunt perpendiculare pe $C'A'$, respectiv $A'B'$.

**b)** $\left(\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\overrightarrow{HC'}\right)^2 = \overrightarrow{HA'}^2+\overrightarrow{HB'}^2+\overrightarrow{HC'}^2+2\overrightarrow{HA'}\cdot\overrightarrow{HB'}+2\overrightarrow{HB'}\cdot\overrightarrow{HC'}+2\overrightarrow{HC'}\cdot\overrightarrow{HA'} =$

$a^2+b^2+c^2+2ab\cos(\pi-C)+2bc\cos(\pi-A)+2ac\cos(\pi-B) = a^2+b^2+c^2-2ab\cos C-2bc\cos A-$

$-2ac\cos B = a^2+b^2+c^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)-\left(b^2+c^2-a^2\right)-\left(c^2+a^2-b^2\right) = 0$, de unde rezultă că

$\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\overrightarrow{HC'} = \vec{0}$, deci $H$ este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

**Problema 3**

**Soluţie. a)** Din $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ şi $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$, prin înmulţirea celei de-a doua relaţii cu $k$ şi adunarea lor rezultă $(1+k)\cdot\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+k\cdot\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+k\cdot\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{DN}+k\cdot\overrightarrow{CN}\right)=\overrightarrow{AD}+k\cdot\overrightarrow{BC}$, de unde rezultă concluzia.

**b)** Fie $O\in[O_1O_2]$ astfel încât $O_1O=k\cdot OO_2$. Conform punctului a) rezultă că $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k+1}\cdot\left(\overrightarrow{O_1M}+k\cdot\overrightarrow{O_2N}\right)$ şi din inegalităţile triunghiulare rezultă că $\left|\overrightarrow{OP}\right|\le\frac{1}{k+1}\cdot\left(\left|\overrightarrow{O_1M}\right|+k\cdot\left|\overrightarrow{O_2N}\right|\right)$, respectiv $\left|\overrightarrow{OP}\right|\ge\frac{1}{k+1}\cdot\left\|\overrightarrow{O_1M}\right|-k\cdot\left|\overrightarrow{O_2N}\right\|$, adică $OP\le\frac{R_1+k\cdot R_2}{k+1}$ respectiv $OP\ge\frac{\left|R_1-k\cdot R_2\right|}{k+1}$. Cum punctul $O$ este fix, rezultă că mulţimea punctelor $P$ va fi inclusă în discul $D\left(O;\frac{R_1+k\cdot R_2}{1+k}\right)$ dacă $R_1=k\cdot R_2$, respectiv coroana circulară $D\left(O;\frac{R_1+k\cdot R_2}{1+k}\right)\setminus IntC\left(O;\frac{\left|R_1-k\cdot R_2\right|}{1+k}\right)$, dacă $R_1\ne k\cdot R_2$. Pentru demonstrarea incluziunii inverse, problema revine la determinarea punctelor $M\in C(O_1;R_1)$, respectiv $N\in C(O_2 R_2)$, cu proprietatea că $P\in[MN]$, fixat, iar $MP=k\cdot PN$, $P\in D\left(O;\frac{R_1+k\cdot R_2}{1+k}\right)$ în cazul $R_1=k\cdot R_2$, sau $P\in D\left(O;\frac{R_1+k\cdot R_2}{1+k}\right)\setminus IntC\left(O;\frac{\left|R_1-k\cdot R_2\right|}{1+k}\right)$,dacă $R_1\ne k\cdot R_2$.

Cazul 1). Fie $R_1=k\cdot R_2$ şi $P\in D\left(O;\frac{R_1+k\cdot R_2}{1+k}\right)$, adică $OP\le\frac{R_1+k\cdot R_2}{k+1}$. Presupunem determinate punctele $M$ şi $N$ pe cele două cercuri, deci are loc relaţia $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k+1}\cdot\left(\overrightarrow{O_1M}+k\cdot\overrightarrow{O_2N}\right)$. Considerăm punctele $M'$ şi $N'$ astfel încât $\overrightarrow{O_1M}=\overrightarrow{OM'}$ şi $\overrightarrow{O_2N}=\overrightarrow{ON'}$. Atunci $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k+1}\cdot\left(\overrightarrow{OM'}+k\cdot\overrightarrow{ON'}\right)$. Fie $L\in[ON']$ astfel încât $OL=k\cdot LN'$. Rezultă $PL=\frac{1}{k+1}\cdot OM'$ şi $OL=k\cdot LN'$. Triunghiul $OLP$ (eventual degenerat) poate fi construit, deoarece are laturile de lungimi $OP$, $PL=\frac{R_1}{k+1}$, $OL=\frac{k\cdot R_2}{k+1}$. Punctele $M'$, respectiv $N'$ se determină în mod unic din condiţiile $\overrightarrow{OM'}=(k+1)\cdot\overrightarrow{LP}$, $\overrightarrow{ON'}=\frac{k+1}{k}\cdot\overrightarrow{OL}$, iar punctele $M$, respectiv $N$ se determină în mod unic din condiţiile $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{O_1M}$, $\overrightarrow{ON'}=\overrightarrow{O_2N}$ şi $O_1M=OM'=(k+1)\cdot LP=R_1$, respectiv $O_2N=ON'=\frac{k+1}{k}\cdot OL=R_2$, deci $M\in C(O_1;R_1)$, $N\in C(O_2 R_2)$.

Cazul 2). $R_1\ne k\cdot R_2$. Fie $P\in D\left(O;\frac{R_1+k\cdot R_2}{1+k}\right)\setminus IntC\left(O;\frac{\left|R_1-k\cdot R_2\right|}{1+k}\right)$, adică $\frac{\left|R_1-k\cdot R_2\right|}{k+1}\le OP\le\frac{R_1+k\cdot R_2}{k+1}$. Ca şi în cazul precedent, se poate construi triunghiul $OLP$ cu laturile de lungimi $OP$, $PL=\frac{R_1}{k+1}$, $OL=\frac{k\cdot R_2}{k+1}$, de unde exact ca mai sus, se obţin punctele $M'$, $N'$, iar în final, punctele $M\in C(O_1;R_1)$, $N\in C(O_2 R_2)$.